Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Corse

Mercredi 18 mars 2015 de 8 heures à 12 heures

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 1 heure après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

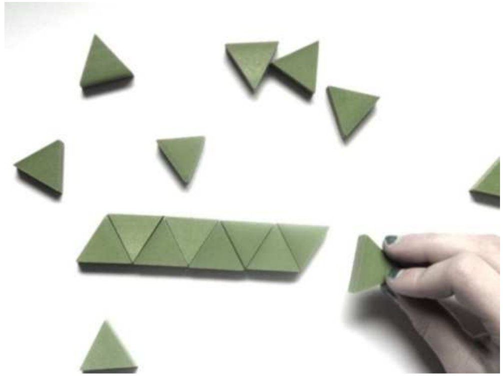
Exercice numéro 1

(Proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

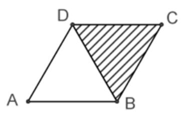
- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].



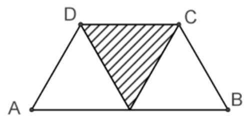
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

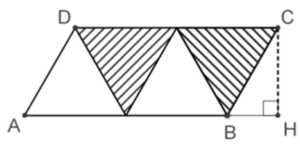
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



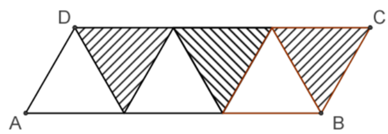
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1^re^ propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2^e^ propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

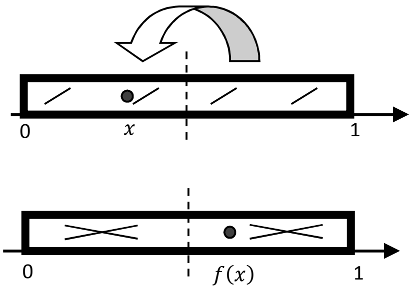
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2

(Proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? L'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe.

Variables
x est un élément de $[0\,,1]$
Début
Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
Tant que $x \neq 0$ **faire**
Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
x **prend la valeur** $2\,x$
Sinon
x **prend la valeur** $2(1-x)$
Fin tant que
Fin

Exercice numéro 3

(Proposé par le jury académique)

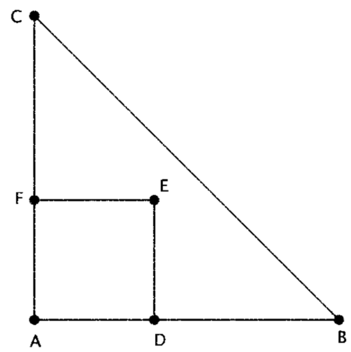
Découpage de tissus

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment.

Thomas et Marie ont acheté des morceaux de tissu en forme de triangle rectangle. Dans ces tissus, ils veulent couper une pièce rectangulaire, en gaspillant le moins de tissu possible.

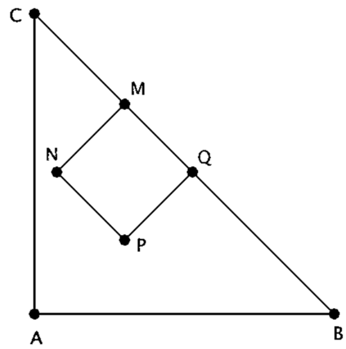
Partie A

Un premier morceau de tissu a la forme d'un triangle ABC rectangle en A et isocèle, tel que AB=1 m. Thomas envisage d'y découper un carré dont un sommet est A et où deux autres sommets sont un point F du côté [AC] et un point D du côté [AB].



1. Thomas observe que s'il trace ainsi des carrés de tailles différentes AFED et AF'E'D' où Fet F' sont des points de [AC] et D et D' des points de [AB], alors A, E et E' sont alignés. Démontrer ce résultat.
2. Marie lui fait remarquer « l'aire d'un carré est la moitié du carré de la longueur d'une de ses diagonales ». Marie a-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.
3. Comment choisir le point E pour que le carré AFED tracé sur le morceau de tissu ait une aire la plus grande possible? Démontrer que cette aire est 0,25 m^2.

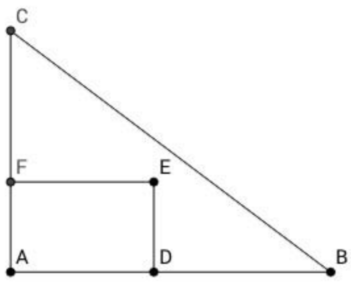
Partie B



Thomas s'interroge sur la possibilité d'obtenir à partir de ce morceau de tissu un carré d'aire supérieure en traçant un carré MNPQ où M et Q sont des points de [BC].

1. Thomas place d'abord M tel que CM=40cm. Déterminer la position de Q tel que le carré MNPQ soit tracé dans la pièce de tissu et ait une aire la plus grande possible que l'on déterminera.
2. Thomas essaie de tracer le carré en choisissant M tel que CM=50 cm. Qu'observe-t-il ? Calculer l'aire du carré d'aire maximale obtenu.
3. La méthode de la partie A ayant permis de tracer dans le triangle ABC un carré d'aire 0,25 m^2, est-il possible par cette méthode de tracer un carré d'aire supérieure ?

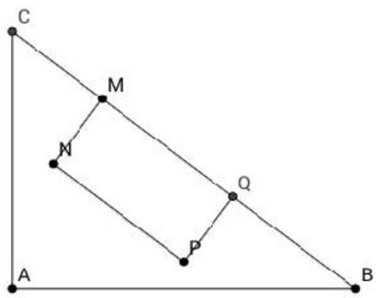
Partie C



Un nouveau morceau de tissu a la forme d'un triangle ABC rectangle en A ayant des côtés de 8 décimètres et 6 décimètres. Marie souhaite y découper un rectangle AFED d'aire la plus grande possible.

1. Démontrer que, pour obtenir une aire maximale, le point E doit nécessairement se trouver sur [BC]. Exprimer alors en fonction de AD, l'aire du rectangle AFDE.
2. Déterminer l'aire du rectangle AFED d'aire maximale que l'on peut tracer sur la pièce de tissu.

Partie D



Marie s'interroge sur la possibilité d'obtenir à partir de ce morceau de tissu un rectangle d'aire supérieure en traçant un rectangle MNPQ où M et Q sont des points de [BC].

1. Soit H le pied sur [BC] de la hauteur du triangle ABC, issue de A Calculer en décimètres les longueurs AH et CH.

2. Déterminer la position des points M, N, P et Q pour que l'aire du rectangle MNPQ soit maximale, et calculer cette aire.

Exercice numéro 4

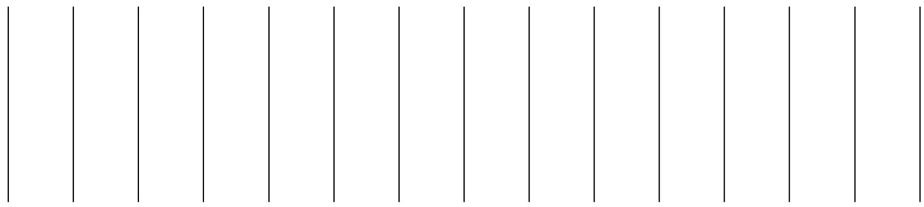
(Proposé par le jury académique)

Jouer sans danger avec des allumettes

Partie A

Deux amies, Corinne et Jeanine, jouent à un jeu dont le principe est le suivant :

- un certain nombre d'allumettes (que l'on notera *n*) sont disposées sur une table;
- les joueuses jouent à tour de rôle. Dans la situation étudiée, Corinne commence, Jeanine joue ensuite;
- à chaque tour, chaque joueuse peut choisir de retirer du paquet soit une, soit deux, soit trois allumettes;
- est déclarée vainqueur la joueuse retirant la dernière allumette.



Exemple de situation initiale du jeu lorsque $n = 15$

1. Dans cette question uniquement, $n = 3$. Expliquer pourquoi, si elle joue bien, Corinne est sure de gagner. On dira que dans ce cas, elle adopte une *stratégie gagnante*.

2. Dans cette question uniquement, $n = 4$. Montrer que, dans ce cas, Jeanine peut adopter une stratégie gagnante. Détailler cette stratégie.

3. Dans cette question uniquement, $n = 5$. Une des deux joueuses peut adopter une stratégie gagnante. Laquelle? Détailler alors la stratégie gagnante.

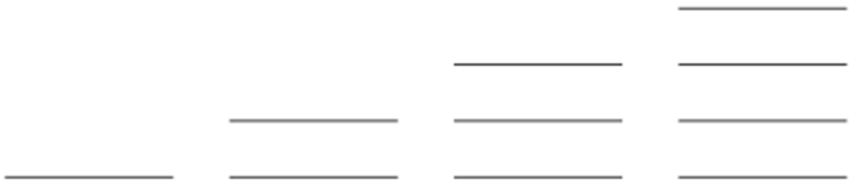
4. Reprendre la question 3 lorsque $n = 8$ et lorsque $n = 15$.

5. Soit *n* un entier naturel non nul. Discuter selon la valeur de *n* de l'existence d'une stratégie gagnante pour chacune des deux joueuses. Expliquer alors cette stratégie.

Partie B

Une variante du jeu précédent repose sur les règles suivantes :

- un certain nombre d'allumettes sont disposées sur une table en formant plusieurs rangées, le nombre d'allumettes de chaque rangée pouvant être différent;
- les deux joueuses jouent à tour de rôle. Comme précédemment, Corinne commence, Jeanine joue ensuite;
- à chaque tour, chaque joueuse peut choisir de retirer le nombre d'allumettes de son choix (au moins une), mais toutes les allumettes que l'on souhaite retirer doivent se trouver dans une même rangée;
- est déclarée vainqueur la joueuse retirant la dernière allumette.



Exemple de situation initiale

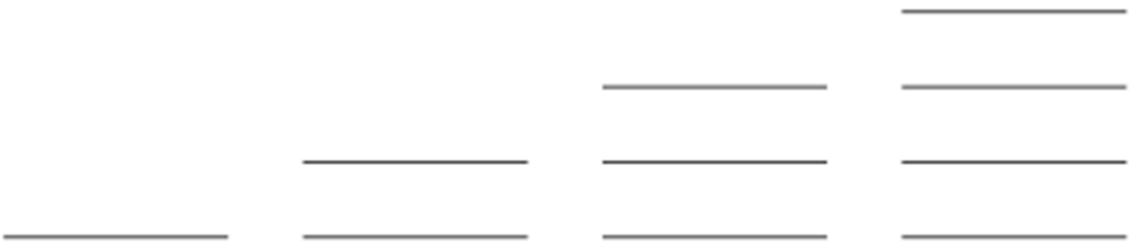
1. Dans chacune des situations suivantes, l'une des deux joueuses peut adopter une stratégie gagnante. Déterminer dans chaque cas de qui il s'agit et détailler la stratégie gagnante.

(a)

(b)

(c)

2. On considère à présent la situation suivante.



Corinne affirme : « Ici, puisque c'est à moi de commencer, je suis certaine de gagner ». A-t-elle raison? Expliquer pourquoi.