MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Corse

Mercredi 16 mars 2016 de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 1h30 de composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

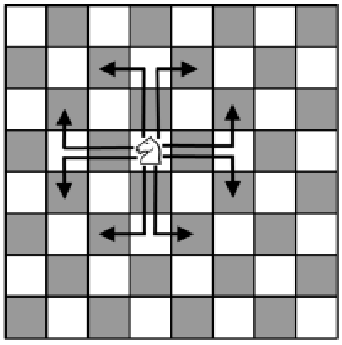
Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.**

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Cavalier seul

Aux échecs, un cavalier se déplace de la façon suivante :



1. Sur un échiquier de dimension 3x4, déplacer un cavalier afin qu'il parcourt l'ensemble des cases, sans repasser deux fois par la même.

1			
		2	

2. Est-il possible sur un échiquier de dimension 3x5, que le cavalier réalise un cycle. C'est-à-dire qu'il parcourt l'ensemble des cases sans repasser deux fois par la même et en revenant à la case de départ ?

3. A) On joue désormais sur un échiquier 3x3, où chaque case est numérotée de 1 à 9 comme suit :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Au départ le cavalier se trouve sur la case 1. On place dans une urne neuf boules numérotées de 1 à 9 indiscernables au toucher. On tire ainsi au sort le numéro de la case sur laquelle le cavalier doit se rendre en un minimum de coups puis on remet la boule dans l'urne. Chaque numéro a ainsi la même probabilité de sortir. On interrompt le tirage si la case est inaccessible.

Au bout de combien de tirages dépasse-t-on 90 % de chance que la partie ait été interrompue ?

B) Voici un algorithme :

lorsque u est une liste u[n] est le n-ième terme de la liste, le premier étant u[1].

Variables : p, n, x, c : nombres entiers

u : liste de nombres entiers

Initialisation : Affecter à p la valeur 1

Affecter à c la valeur 0

Affecter à u la liste {1 ;4 ;7 ;6 ;0 ;2 ;3 ;8 ;5}

Traitement : Tant que p ≠ 5 Faire

Début TantQue

Demander un nombre entier de 1 à 9, l'affecter à n

Affecter à x la valeur absolue de (u[n]-u[p])

Affecter à x la valeur minimum entre x et (8-x)

Affecter à c la valeur de c+x

Affecter à p la valeur de n

Fin TantQue

Sortie : Afficher c-x

a) Indiquer les valeurs que prennent tour à tour les variables x et c lorsqu'on entre successivement les nombres 8, 7, 3 et 5?

b) Qu'indique en sortie cet algorithme ?

Exercice académique numéro 2 (à traiter par tous les candidats)

Changeons les règles !

Soient a et b deux nombres réels.

— On appelle « addition tropicale » de a et b et on note $a \oplus b$ la quantité

$$a \oplus b = \min(a\,;\,b)$$

c'est à dire le plus petit des deux nombres a et b.

— On appelle « multiplication tropicale » de a et b et on note $a \otimes b$ la quantité

$$a \otimes b = a + b,$$

c'est à dire l'addition habituelle de a et b.

D'une manière plus générale, l'addition tropicale de plusieurs nombres correspond au plus petit de ses nombres et la multiplication tropicale de plusieurs nombres est l'addition habituelle de ces nombres.

On note aussi $a^{②} = a \otimes a$.

Exemple. On a par exemple, $3 \oplus 2 = \min(3\,;\,2) = 2$ et $2,5 \otimes 3 = 2,5 + 3 = 5,5$.

1. Effectuer les opérations suivantes :
   (a) $5 \oplus (-5)$;
   (b) $7 \oplus 7$;
   (c) $3 \oplus 1 \oplus 7$;
   (d) $\frac{3}{5} \oplus \frac{1}{2}$;
   (e) $5 \otimes (-5)$;
   (f) $3^{②}$;
   (g) $3 \otimes 1 \otimes 7$;
   (h) $6 \otimes (4 \oplus 2)$.
2. (a) a est un nombre réel. On précise que le nombre a^2 est le carré habituel de a, c'est à dire $a \times a$ où $\times$ désigne la multiplication habituelle.
   Calculer la quantité $a^2 + 1 \oplus 2a$.
   (b) a et b sont deux nombres strictement positifs.
   Calculer, selon les valeurs de a et b, la quantité $\frac{a}{b} \oplus \frac{a+1}{b+1}$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $x^{②} = 9$;
   (b) $x^{②} = -1$;
   (c) $2 \oplus x = 0$;
   (d) $2 \oplus x = 5$;
   (e) $2 \oplus x = x$.

4. Soient a et b deux réels positifs.
   (a) Montrer que $(a \oplus b)^{\textcircled{2}} = a^{\textcircled{2}} \oplus b^{\textcircled{2}}$;
   (b) Montrer que l'on a aussi $(a \oplus b)^{\textcircled{2}} = a^{\textcircled{2}} \oplus (2 \otimes a \otimes b) \oplus b^{\textcircled{2}}$;

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans un repère.

5. (a) Le point $A(3\,;\,12)$ appartient-il à la « droite tropicale » d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$? Même question pour les points $B(5\,;\,6)$, $C(6\,;\,6)$ et $D(1\,;\,3)$.
   (b) Tracer dans un repère orthonormé la « droite tropicale » d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$.
   On choisira un repère dans lequel 1 unité de longueur correspond à 1 cm.
   (c) Dans un repère, on considère les droites tropicales d d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = x \oplus 0$.
   Est-il vrai que les droites d et Δ sont confondues ? Justifier.
   (d) Décrire, éventuellement à l'aide d'une figure, l'ensemble formé des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant l'équation $y = (a \otimes x) \oplus b$, où a et b sont deux nombres réels.
6. (a) Déterminer l'intersection des droites d_1 d'équation $y = x$ et d_2 d'équation $y = 1 \otimes x$.
   (b) Déterminer l'intersection des droites d_3 d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$ et d_4 d'équation $y = (4 \otimes x) \oplus 4$.
   (c) b et b' sont deux nombres réels distincts. Déterminer l'intersection des droites d_5 d'équation $y = x \oplus b$ et d_6 d'équation $y = x \oplus b'$.