



RÉGION ACADÉMIQUE
CORSE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE



Olympiades nationales de mathématiques

Académie de Corse

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices**.



Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Algorithme de Kaprekar

On considère l'algorithme suivant :

Variables : N , G , P , k et `nombreboucles` sont des entiers naturels.

- Choisir `nombreboucles`
- Choisir un nombre N à deux chiffres
- Pour k allant de 1 à `nombreboucles`
 - Former le nombre G , qui est le plus grand possible avec les deux chiffres composant ce nombre
 - Former le nombre P , qui est le plus petit possible avec les deux chiffres composant ce nombre
 - N prend la valeur $G-P$
 - Afficher N

Par exemple, si on choisit `nombreboucles`= 2 et $N= 70$, l'algorithme affiche successivement les nombres suivants :

- $N= 63$, car $G= 70$ et $P= 07$;
- $N= 27$.

1. Faire fonctionner l'algorithme avec les valeurs `nombreboucles`= 3 et $N= 77$ puis avec les valeurs `nombreboucles`= 8 et $N= 70$ et enfin avec les valeurs `nombreboucles`= 8 et $N= 13$. *Vous préciserez en particulier dans chaque situation, les valeurs affichées sur l'algorithme.*
2. Dans cette question uniquement on suppose que le nombre N choisi au début de l'algorithme est formé de deux chiffres identiques.
Quelle conjecture peut-on émettre sur les valeurs affichées par l'algorithme ? Démontrer votre conjecture.
3. On suppose à présent que le nombre N choisi au début de l'algorithme est composé de deux chiffres différents. On rappelle que, si on note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, alors on a : $N= 10a + b$.
 - (a) Montrer que toutes les valeurs affichées par l'algorithme sont des multiples de 9.
 - (b) Montrer que les valeurs 99 et 00 ne seront jamais affichées par l'algorithme. *On rappelle que dans cette question, on suppose que le nombre N choisi au début de l'algorithme est composé de deux chiffres différents.*
 - (c) Montrer que tous les nombres affichés par l'algorithme, sauf éventuellement le premier, sont des nombres impairs.
 - (d) Montrer que si le nombre N choisi au début de l'algorithme s'écrit avec deux chiffres différents, alors les valeurs affichées par l'algorithme, sauf éventuellement la première, suivent un cycle de longueur 5.

Exercice académique numéro 2

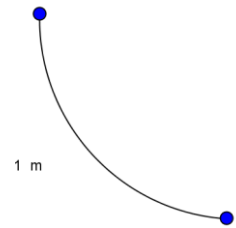
Les SKARS et des QUARTS sur P90

La planète P90 est peuplée d'habitants, les SKARS, qui ont un mode de déplacement particulier sur un sol que l'on assimile à un plan : un SKAR ne se déplace qu'en faisant une succession de quarts de cercles complets de longueur 1m, deux quarts de cercles successifs ne pouvant pas avoir le même centre, c'est-à-dire que le SKAR ne fait pas de demi-cercle.

Lorsqu'il parcourt un quart de cercle on dira que le SKAR fait un « pas ».

1- Un SKAR souhaite se déplacer d'un point A à un point B.

- Vérifier que, s'il n'a fait qu'un pas pour aller de A à B, la distance AB est d'environ 90 cm.
- Si un SKAR part d'un point A, quel est l'ensemble des points du plan qu'il peut atteindre en un seul pas.
- Deux points A et B étant distants de 0,5 m, un SKAR veut aller de A à B en une succession de pas ? Décrivez et dessinez un itinéraire en deux pas puis un itinéraire en trois pas.
- Si un SKAR part d'un point A, quel est l'ensemble des points qu'il peut atteindre en deux pas ?

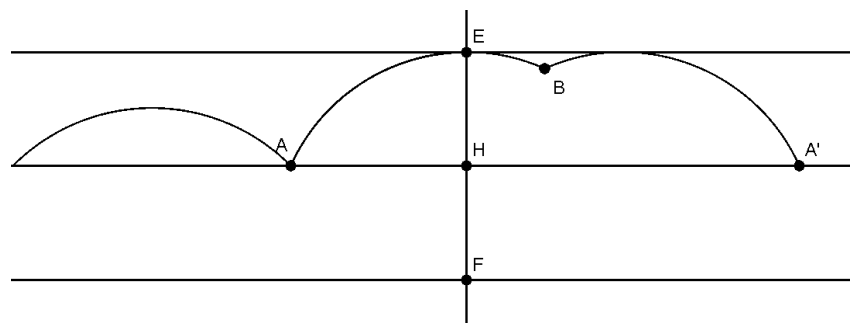


2- Un SKAR veut aller d'un point A à un point B distants de 2017 m.

- Quel est le nombre de pas minimum qu'il faudra effectuer pour aller de A à B.
- La planète P90 est peuplée de 1000 milliards de milliards de SKARS. Est-il possible que chaque SKAR puisse emprunter un chemin différent pour aller de A à B ?

3- Un SKAR se balade sur un chemin rectiligne de largeur d , égale à 0,90 m sans en sortir et en faisant en sorte que les extrémités de ses pas restent sur l'axe central (D) du chemin. Mais ce chemin est coupé par un énorme arbre tombé perpendiculairement à cet axe et ne laissant qu'un petit passage sur un des bords du chemin qui l'oblige à changer sa

trajectoire. Cette situation est modélisée sur la figure suivante, où l'arbre est représenté par le segment [EF] et le passage étant considéré comme étant le point E et où A est la dernière position du SKAR sur l'axe (D) avant de franchir l'obstacle. Le SKAR projette ainsi une trajectoire représentée par l'arc de cercle d'extrémités A et B passant par E.



- Démontrer que le centre O de l'arc de cercle décrit par le SKAR doit se situer sur la droite (EF).
- Déterminer à quelle distance AH du segment [EF] si le SKAR veut pouvoir franchir l'obstacle de cette façon.
- Le SKAR réussit à franchir l'obstacle et parti de A, revient ainsi en deux pas sur l'axe (D) du chemin en un point A'. Déterminer la distance A'H.