MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'un nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?

2. Quelle est la somme des diviseurs de 6 ? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note $N(n)$ le nombre des diviseurs de n, et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.

3. Pour chacun des nombres $6, 101, 361$, 2 021 vérifier l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n).$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$.

b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1.$$

c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1.$$

d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. *a.* Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Entiers $N -$ décomposables

On donne un entier N supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel k est $\boldsymbol{N} -$ décomposable s'il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = q\boldsymbol{N} + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est $\mathbf{21} -$ décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times \mathbf{21} + 4 \end{cases}$; le nombre 28 est $\mathbf{64} -$ décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times \mathbf{64} + 16 \end{cases}$.

A. Quelques exemples

1. ***a.*** Le nombre 7 est-il $22 -$ décomposable ? Est-il $10 -$ décomposable ?
b. Le nombre 45 est-il $100 -$ décomposable ?

2. ***a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres $1 -$ décomposables.
b. Justifier qu'il y a exactement trois nombres $2 -$ décomposables.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
a. Le nombre N est-il $N -$ décomposable ?
b. Prouver que $N - 1$ est $N -$ décomposable.
c. Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas $N -$ décomposable.

B. Une étude des nombres N $-$décomposables

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
1. ***a.*** Prouver que si k est $N -$ décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
b. Quels sont les entiers $3 -$ décomposables ? Quels sont les entiers $4 -$ décomposables ?

2. Prouver que si $N \geq 2$ et si k est $N -$ décomposable, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers vérifiant le système (S).

3. ***a.*** Soit k un nombre $N -$ décomposable. Justifier qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
b. Prouver que, réciproquement, si k est un entier naturel et qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors k est $N -$ décomposable.
c. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est $2^{2p} -$ décomposable.

4. Prouver que si k est $N -$ décomposable, alors $N - k$ est $N -$ décomposable.

5. Dans cette question, on suppose que N est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas $N -$ décomposable.

6. Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers $N -$ décomposables.

7. Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers N $-$décomposables.

8. On donne un entier k supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers N tels que k soit $N -$ décomposable.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Fractions et pyramides égyptiennes

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

1. Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
a. La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
b. Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
c. Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

2. On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.
Par exemple,

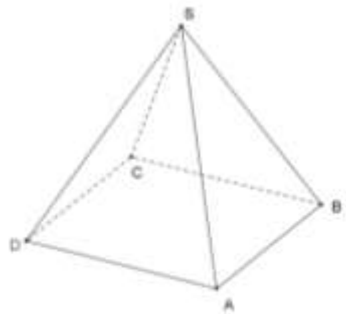
- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.
a. Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel x tel que $0 < x < 1$?
b. Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.

3. On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :
- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.

a. Montrer que la pyramide régulière SABCD à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne



Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière SABCD à base carrée de sommet S dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs AB et SA sont des *fractions égyptiennes*.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.
b. Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si, et seulement si, il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d. En déduire que si p et q sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.