ACADÉMIE DE CORSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Seconde partie : sujet académique

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La seconde partie de l'épreuve contient deux exercices à traiter.

Exercice 1

LA CHASSE AUX VAMPIRES

Certains produits présentent d'étonnantes propriétés. Par exemple, quand on multiplie 146 par 938,on obtient 136 948. Les chiffres du produit sont exactement ceux de ses facteurs dans un ordre différent.
En 1994, Clifford A. Pickover, a remarqué cette curiosité, il a invité les utilisateurs de « usenet » (un ancêtre du « web ») à chasser de tels produits.
Il les a appelé des « nombres vampires ».

Plus précisément, il a qualifié de « nombre vampire » tout nombre :

- composé d'un nombre pair de chiffres ;
- décomposable en un produit de deux facteurs, qu'on appelle « crocs », ayant chacun le même nombre de chiffres ;
- les chiffres de ces « crocs » réunis sont exactement ceux du « nombre vampire » ;
- un seul de ces « crocs » peut finir par 0.

Ainsi, dans notre exemple initial, 136 948 est un « nombre vampire » à 6 chiffres et ses « crocs » de 3 chiffres sont 146 et 938.

1. **a.** Voici trois « nombres vampires » à quatre chiffres : 1 260, 1 395, et 1 435. Déterminer les « crocs » de chacun d'entre eux.

b. Pourquoi avoir pris la précaution de préciser qu'un seul de ces « crocs » peut finir par 0 ?

2. On peut aussi trouver un « nombre vampire » en chiffres romains inférieur à X (lire « 10 »). Lequel ? Les « crocs » doivent évidemment s'écrire également en chiffres romains.

3. On appelle racine numérique d'un nombre entier naturel n, le reste de la division euclidienne de ce nombre par 9. On la note $r(n)$. C'est aussi le nombre qu'on obtient en calculant la somme de ses chiffres et en réitérant le processus jusqu'à obtenir un résultat à un seul chiffre ; dans ce cas, le 9 est assimilé à 0. Si deux entiers naturels n et p ont la même racine numérique, on note $n \equiv p$.

Exemples :

- La racine numérique de 238, qu'on notera $r(238)$ est 4 car $238 = 9 \times 26 + 4$ ou $2 + 3 + 8 = 13$ et $1 + 3 = 4$. On a $r(238) = 4$.
- $r(653\,887) = r(6 + 5 + 3 + 8 + 8 + 7) = r(37)$.
  $653\,887 \equiv 37 \equiv 10 \equiv 1$ ou $r(653\,887) = 1$.
  On peut aussi écrire que $653\,887 = 9 \times 72\,654 + 1$ donc $r(653\,887) = 1$.

Propriété des racines numériques :
L'extraction de la racine numérique est compatible avec la somme et le produit.
Cela signifie que, pour tous entiers naturels u et v :

$$r(u+v) \equiv r(u) + r(v) \quad \textbf{\textit{ET}} \quad r(u \times v) \equiv r(u) \times r(v).$$

a. Montrer que si u et v sont les « crocs » d'un « nombre vampire » alors

$$r(u+v) \equiv r(u \times v).$$

b. Montrer que cette condition nécessaire contraint les « nombres vampires » à avoir une racine numérique valant 0 ou 4.

c. Un multiple de 3 non multiple de 9 peut-il être un « nombre vampire » ? Pourquoi ?

d. Montrer qu'il n'existe pas de « nombre vampire » à deux chiffres.

4. Par définition, les nombres à 3 chiffres ne peuvent pas être des « nombres vampires ». Pourtant, il existe des produits qui s'écrivent exactement avec les chiffres de leurs facteurs. On dit, dans ce cas, que ce sont des « pseudo-vampires ».

a. Montrer que 153 est un « pseudo-vampire ».

b. Trouver un autre « pseudo-vampire » de 3 chiffres.

5. Lorsque les « crocs » sont des nombres premiers, on dit que l'on obtient un « nombre vampire premier ». Montrer que 117 067 est un « nombre vampire premier ».

6. Il y a une infinité de « nombres vampires ».

Démontrons-le avec des « crocs » de formes particulières.

Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = 25 \times 10^k + 1$ et $v_k = 4 \times 10^{k+1} + 208$.

a. Calculer $u_k \times v_k$ pour $2 \leq k \leq 4$ et émettre une conjecture.

b. Démontrer que $u_k \times v_k = 10^{2k+3} + 524 \times 10^{k+1} + 208$.

c. En quoi cette égalité permet-elle d'affirmer qu'il existe une infinité de nombres vampires ?

Exercice 2

LA SUITE DE SYRACUSE

On appelle suite de Syracuse, une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante :

On part d'un nombre entier strictement positif. S'il est pair, on le divise par 2. S'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

On notera u_0 le nombre entier strictement positif duquel on part, u_1 le nombre suivant calculé en utilisant le procédé ci-dessus puis on calcule u_2 et ainsi de suite. On a défini ainsi une suite de nombres entiers que l'on notera (u_n) telle que $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2}, \; si \;\; u_n \;\; est \;\; pair \\ 3u_n + 1, \;\; si \;\; u_n \;\; est \;\; impair \end{cases}$$

<u>Exemple :</u> La suite de Syracuse dont le premier terme est 19 commence par

19 – 58 – 29 – 88 – 44 – 22 – 11 … ainsi $u_0 = 19$; $u_1 = 58$; $u_2 = 29$ ...

On appelle *<u>conjecture de Syracuse</u>* l'hypothèse suivante :

Quel que soit le nombre entier strictement positif choisi au départ, la suite de valeurs atteint toujours le cycle, dit trivial, 4, 2, 1 (c'est-à-dire que, au bout d'un certain temps, les termes de la suite prennent pour valeurs 4, 2 et 1 une infinité de fois).

Ce résultat n'a toujours pas été démontré à ce jour.

A. <u>Quelques exemples</u>

1. **a.** Donner les dix premiers termes de la suite (u_n) sachant que $u_0 = 10$.

b. Donner les vingt premiers termes de la suite (u_n) sachant que $u_0 = 7$.

c. Vérifier la conjecture de Syracuse pour la suite de premier terme 11.

L'ensemble des valeurs de la suite est appelé ***le vol***. On définit alors :

- ***Le temps de vol de cette suite*** est le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n = 1$.
- ***L'altitude maximale de la suite*** est la valeur maximale de la suite.
- ***La durée de vol en altitude*** est le nombre de valeurs supérieures ou égales à la valeur de départ avant d'obtenir une valeur strictement inférieure à celle de départ ; c'est-à-dire le plus petit indice n tel que $u_n < u_0$.

2. Indiquer le temps de vol, l'altitude maximale et la durée de vol en altitude de la suite de Syracuse de premier terme 20.

3. *Cas d'une suite dont le premier terme est une puissance de 2.*

a. Indiquer le temps de vol, l'altitude maximale et la durée de vol en altitude de la suite de Syracuse de premier terme une puissance de 2 (quelconque).

b. Trouver le premier terme d'une suite de Syracuse, pour que cette suite ait un temps de vol égal à 11.

c. Montrer que pour tout entier naturel *p* non nul, il existe au moins une suite de Syracuse dont le temps de vol est égal à *p*.

B. <u>Quelques résultats</u>

1. *Avec un premier terme particulier*

a. Montrer que tout vol dont le premier terme est de la forme $4k+1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ a une durée de vol en altitude égale à 3.

b. Quelle est la durée de vol en altitude d'une suite de Syracuse dont le premier terme est de la forme

$16k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}^*$?

2. *A propos des multiples 3 dans la suite de Syracuse*

a. Démontrer que s'il existe un entier naturel non nul p tel que u_p est un multiple de 3, alors u_{p-1} est aussi un multiple de 3.

b. En déduire que $u_0 = 2^p u_p$.

3. *Les nombres impairs dans la suite de Syracuse*

En s'intéressant aux nombres impairs apparaissant dans une suite de Syracuse, on a démontré la formule suivante :

$$n_i = \frac{3 \times n_{i-1} + 1}{2^{k_i}}$$

avec n_i un nombre impair de la suite de Syracuse et n_{i-1} le nombre impair qui précède n_i dans cette suite, et k_i un entier naturel.

Exemple avec la suite de Syracuse de premier terme 19 :

19 – 58 – **29** – 88 – 44 – 22 – **11** – …

On peut vérifier que :

$29 = \frac{3\times19+1}{2}$; $11 = \frac{3\times29+1}{2^3}$ …

- **a.** En utilisant la suite de Syracuse de premier terme 17, écrire chaque nombre impair en fonction du précédent en utilisant cette formule.
- **b.** En utilisant **a.**, en déduire que 1 peut s'écrire comme somme de trois fractions, de la forme $\frac{a\times3^k}{2^n}$ avec a, k, n entiers naturels.

4. *Etude d'une sous-suite de la suite* (u_n)

Afin d'accélérer le temps de vol, on s'intéresse à la fonction T qui permet de construire une sous-suite de la suite originale.

La fonction T est donnée par $T(m) = \begin{cases} \frac{m}{2} & si\ m\ est\ pair \\ \frac{3m+1}{2} & sinon \end{cases}$

Par exemple, $T(14) = \frac{14}{2} = 7$; $T(5) = \frac{3\times5+1}{2} = 8$.

- **a.** Montrer que $T(m+2a) = a + T(m)\ ou\ T(m+2a) = 3a + T(m)$ selon la parité de m, avec a et m des entiers naturels.
  Ainsi $T(m+2a) = at_0 + T(m)$ avec $t_0 = 1$ ou $t_0 = 3$ selon la parité de m.

- **b.** Montrer que $T(m+4a) = 2at_1 + T(m)$ avec $t_1 = 1$ ou $t_1 = 3$ selon la parité de m.

- **c.** Montrer que $T^{(2)}(m+4a) = t_1t_2a + T^{(2)}(m)$ avec $t_2 = 1$ ou $t_2 = 3$ selon la parité de $T(m)$, avec a et m des entiers naturels.

La notation $T^{(2)}(m+4a)$ indique que l'on a appliqué deux fois la fonction T au réel $m+4a$, soit $T^{(2)}(m+4a) = T\big(T(m+4a)\big)$.