

Olympiades inter-académiques de Mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 23 mars 2021

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

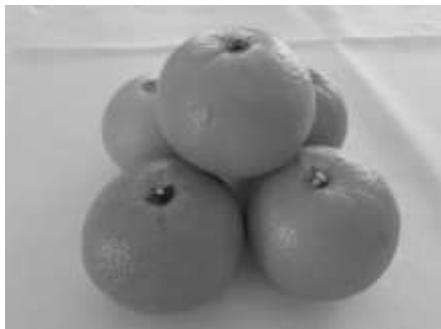
Le sujet comporte quatre exercices, les quatre exercices sont à traiter. Les exercices 1 et 2 sont en page 2 et les exercices 3 et 4 sont en page 3.

Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les traces de leurs recherches et les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1

Pyramides d'oranges

Sur l'étal du marchand, tous les fruits sont rangés. Les oranges sont organisées en pyramides à base carrée. L'étage du haut comporte une seule orange. Cet étage est noté E_1 . L'étage au-dessous sera noté E_2 , et ainsi de suite. Chaque orange est posée sur quatre autres.



1. **a.** Combien d'oranges comporte l'étage E_2 ?
- b.** Combien d'oranges comporte l'étage E_3 ?
- c.** Combien d'oranges comporte l'étage E_{10} ?
- d.** Y a-t-il un étage comportant exactement 64 oranges ?
- e.** Y a-t-il un étage comportant exactement 200 oranges ?

2. Combien d'oranges comporte :

- a.** une pyramide à 2 étages ?
- b.** une pyramide à 3 étages ?
- c.** une pyramide à 10 étages ?

3. Les oranges de l'étal ont été organisées pour former une pyramide à sept étages. La pyramide se révèle malheureusement trop instable et il faut en former de plus petites. Proposer une organisation en pyramides à base carrée permettant de ranger toutes les oranges. Toutes les pyramides seront complètes et chacune comptera au minimum 3 étages.

Exercice 2

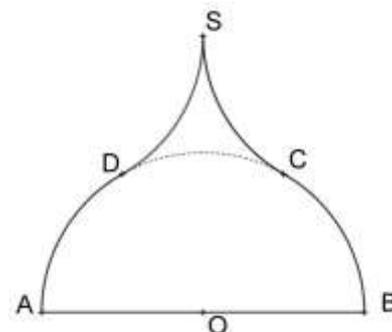
Coupole

Le toit d'un édifice parisien est surmonté de cinq coupoles en forme de bulbe (photo ci-dessous).

La figure ci-dessous à droite représente une coupe verticale de la partie haute de la plus grande de ces coupoles.

Les points C et D se trouvent au tiers (en partant de B ou de A) du demi-cercle de diamètre [AB]. Les arcs de cercles \widehat{CS} et \widehat{DS} sont les images respectives des arcs \widehat{BC} et \widehat{AD} dans les symétries de centres C et D.

Le diamètre [AB] a pour longueur 11 m.



1. Quelle est la nature du triangle AOD ?
2. Quelle est la nature du triangle CSD ?
3. Quelle est l'aire de la partie de plan constituée du demi-disque de diamètre [AB] et du triangle curviligne CSD ?

Exercice 3

Carrés magiques

On s'intéresse aux carrés magiques 3×3 : ce sont des tableaux à trois lignes et trois colonnes (désignées respectivement par L_1, L_2, L_3 et C_1, C_2, C_3) dans lesquels sont inscrits 9 nombres, de sorte que les sommes des nombres écrits dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale (les diagonales sont désignées par D_1 et D_2) soient égales. Cette somme commune est notée S , c'est la *constante* du carré magique.

1. Dans le carré ci-contre, on inscrit les entiers compris entre 1 et 9. Le compléter pour en faire un carré magique.

		8
		1
		6

2. Des deux tableaux ci-dessous, un seul est magique. Lequel ?

23	-2	33
28	18	8
3	38	13

-1,5	-9,5	-5,5
-7,5	-2,5	-6,5
-0,5	-3,5	-12,5

3. On désigne par x un nombre quelconque. On se demande s'il est possible de créer un carré magique 3×3 dans lequel figureraient les neuf nombres

$$16x - 10; 2x - 3; -2; 4x - 4; 12x - 8; 10x - 7; 6x - 5; 8x - 6; 14x - 9.$$

- a. Quelle serait la constante de ce carré magique ?
- b. Proposer un carré magique 3×3 utilisant ces neuf nombres.

4. Proposer finalement deux carrés magiques 3×3 :

- a. Un carré de 9 nombres tous négatifs ;
- b. Un carré de constante $S = 30$.

Exercice 4

Chamboule-tout

Sur la figure ci-contre, les aires de six carrés ont été indiquées. Un des sommets du carré oblique blanc coïncide avec un des sommets du carré d'aire 1. Quelle est l'aire du carré blanc ?

