Olympiades académiques de mathématiques 2019

Académie de Corse

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la deuxième partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

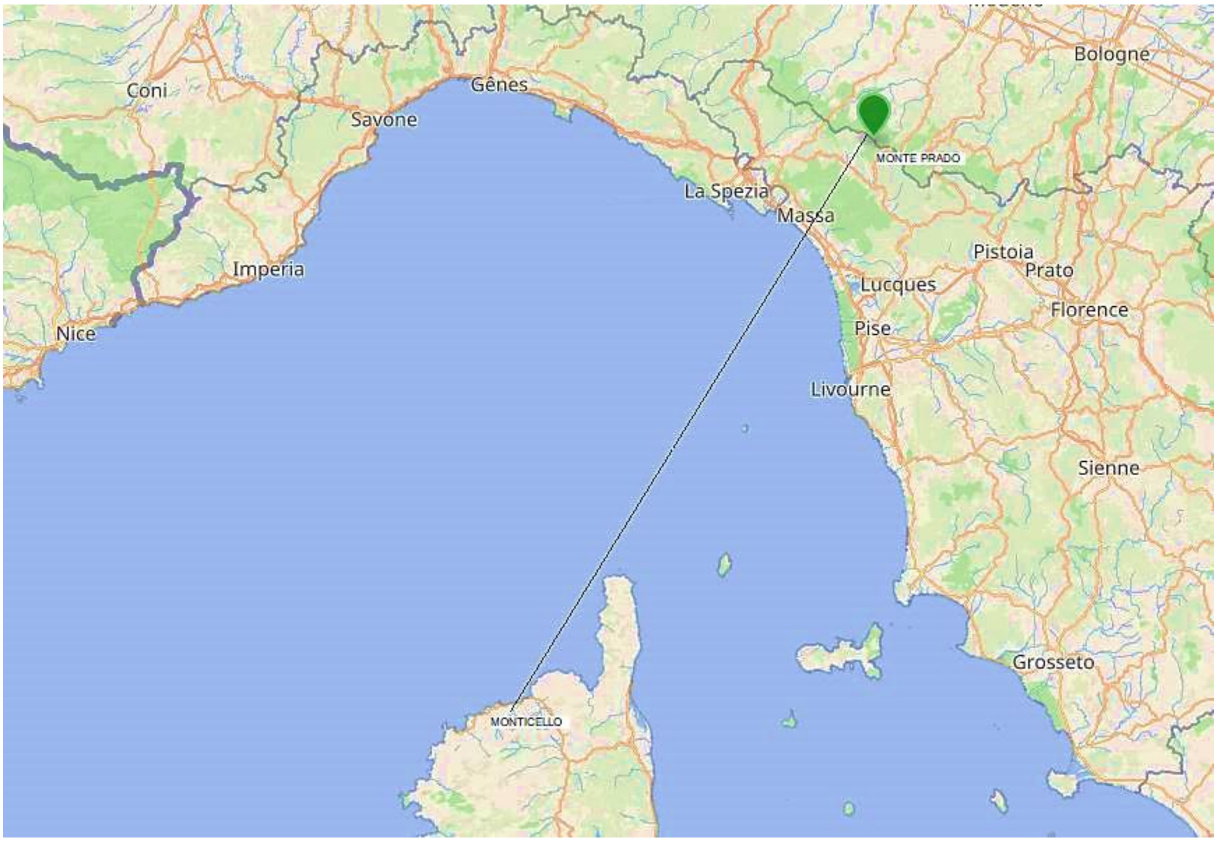
Les candidats traitent **deux exercices.**

Exercice numéro 1 « *Voyage Corse- Italie* » et exercice numéro 2 « *En marches !* »

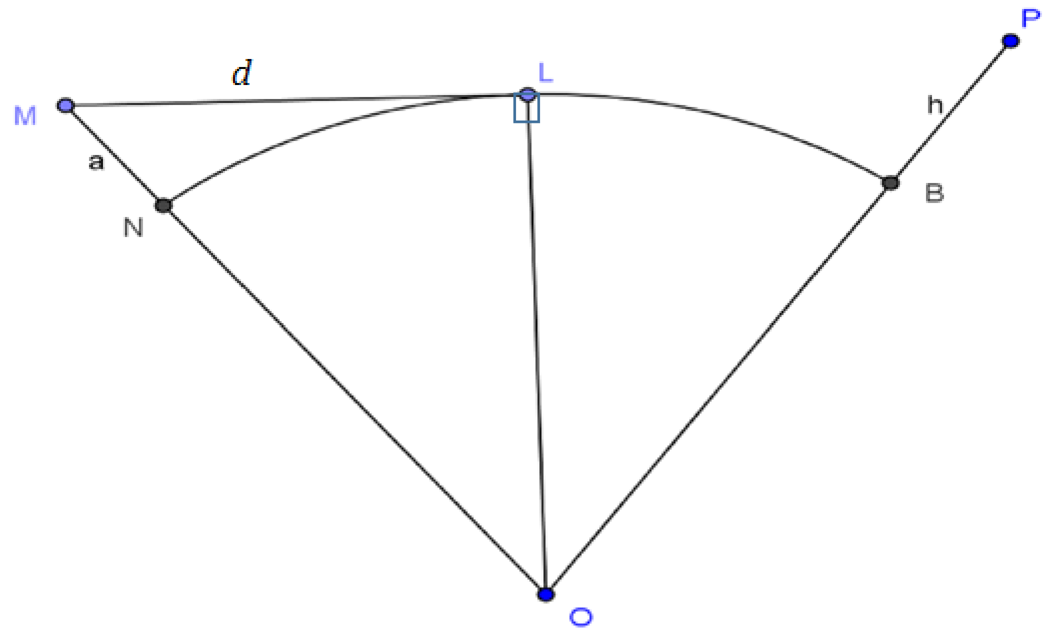
Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Voyage Corse- Italie

Depuis la place de Monticello en Balagne (Haute-Corse), les jours de grande visibilité, on peut observer la chaîne de montagnes des Apennins du Nord, en Italie. On observe en fait le parc des Apennins d'Emile-Toscane dont le point culminant est le Mont Prado (2053 m).



La figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O.



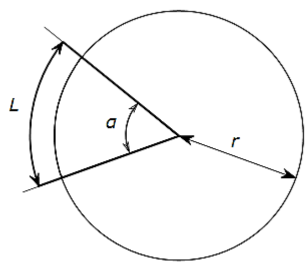
Les points M et P représentent respectivement la place de Monticello et le sommet du Mont Prado.

On donne le rayon terrestre : R = 6370 km.

On indique d'autre part que le Mont Prado culmine à l'altitude h : h= BP = 2053 m et que la place de Monticello se trouve à l'altitude a : a = MN = 218 m.

La distance de B à N est de 215 km, cette distance correspond à la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{BN}}$ indiqué sur la figure.

De façon générale, on rappelle que la longueur L d'un arc de cercle de rayon r se calcule de la façon suivante : $L = r \times \frac{\pi\alpha}{180}$, α étant un angle exprimé en degré.



1. Depuis la place de Monticello, certains points, comme L, sont situés à l'horizon, au niveau de la mer. On souhaite calculer la distance d = ML

a. Montrer que $d = \sqrt{2Ra + a^2}$. Donner une valeur approchée de d au mètre près.

b. Quelle est alors la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{NL}}$? Comparer cette longueur avec d.

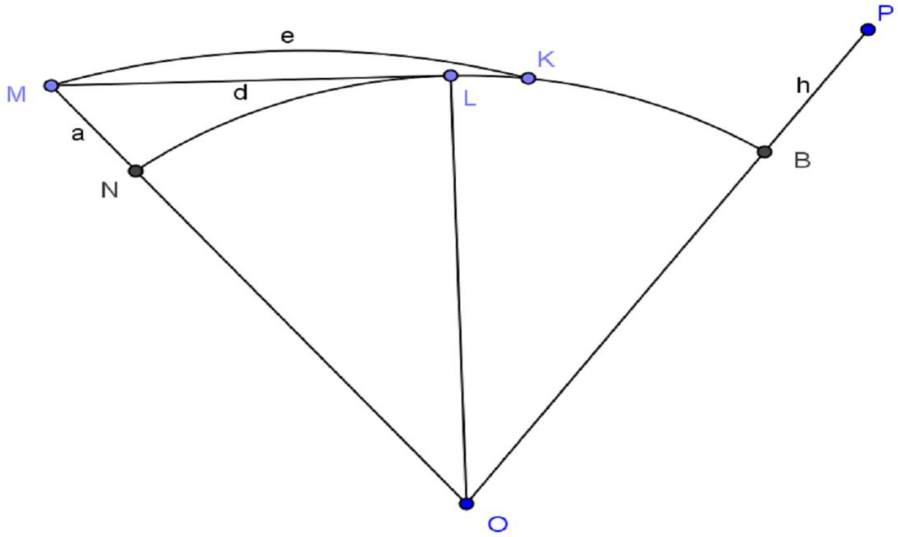
c. On pose $d' = \sqrt{2Ra}$. Que remarque-on ?

2. Déterminer à partir de quelle hauteur la paroi du Mont Prado est visible depuis la place de Monticello. Quel paradoxe obtient-on ?

3. La réfraction de la lumière et la rotondité de la Terre expliquent ce paradoxe : l'atmosphère se comporte comme une succession de dioptres courbes, ce qui améliore la distance de visibilité théorique. On admet que la distance e à l'horizon optique depuis la place de Monticello, supérieure à la distance d théorique, est donnée par la formule :

$e = \sqrt{\frac{2R\mathrm{a}}{0.83}}$ où 0,83 est un coefficient de correction dû à la réfraction atmosphérique.

e correspond à la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{MK}}$ sur la figure ci-dessous :



a. Calculer la distance e à l'horizon optique depuis la place de Monticello. Donner une valeur approchée de e au mètre près.

b. Soit S un point du segment [BP] (sur la paroi du Mont Prado). De même, exprimer la distance e' à l'horizon optique depuis le point S en fonction de la distance BS.

c. On admet que S correspond au point d'altitude minimale visible depuis la place de Monticello si $e + e' = 215\ km$ (avec e et e' exprimées en kilomètres).

Calculer la longueur de paroi du Mont Prado visible depuis la place de Monticello.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par tous les candidats)

En marches !

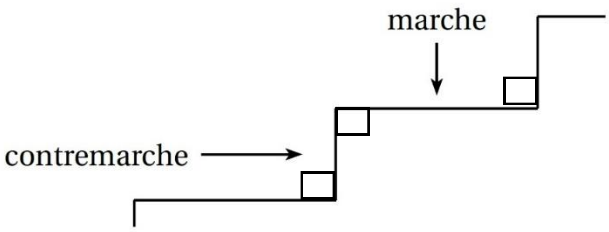
Monter des escaliers en forçant le moins possible !

Et s'il existait une formule pour construire l'escalier idéal ?

Au XVIIème siècle, l'architecte François Blondel s'est penché sur le problème.

Pour présenter ses conclusions, introduisons quelques définitions et notations.

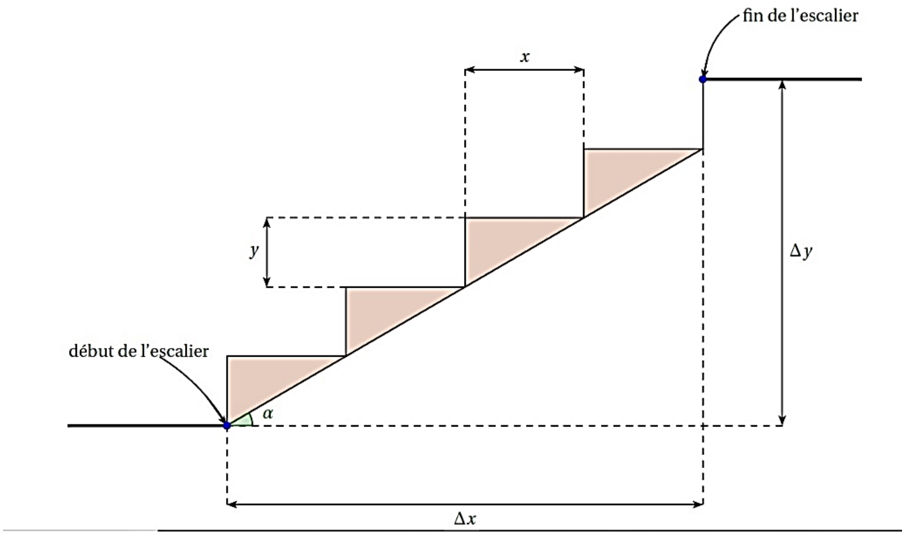
- On appelle **contremarche** chaque partie verticale d'un escalier ;
- On appelle **marche** chaque partie horizontale de l'escalier.



Dans tout l'exercice on suppose que la contremarche est perpendiculaire à la marche. On note :

- n le nombre de contremarches constituant l'escalier, c'est à dire le nombre d'élévations. On précise que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ;
- x la profondeur (en cm) d'une marche et y la hauteur de la contremarche (en cm) ;
- Δx la profondeur totale (en cm) de l'escalier et Δy sa hauteur totale (en cm).

On précise que l'escalier commence au bas de la première contremarche et se termine en haut de la dernière contremarche. La figure ci-dessous est donnée à titre d'exemple.



On a représenté ci-dessus un escalier idéal constitué de 5 contremarches et on a représenté également la mesure α de l'angle que « fait » l'escalier avec l'horizontale.

D'après les travaux de François Blondel, on peut estimer qu'un *escalier confortable* doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x + 2y = 65 \\ x \geq 25 \\ y > 0 \end{cases}.$$

On appellera *escalier idéal* un escalier confortable dont toutes les marches ainsi que toutes les contremarches sont identiques.

1. On considère un escalier idéal constitué de 5 contremarches tel que $x = 30$. Montrer que :

$$\Delta x = 120 \text{ et } \Delta y = 87{,}5.$$

2. **a.** On considère les valeurs : $\Delta x = 25$ et $\Delta y = 40$.
Montrer qu'il est possible de réaliser un escalier idéal.
Préciser le nombre n de contremarches dans ce cas.

b. Marie affirme que : « Avec les conditions imposées pour construire un escalier idéal, on a forcément $x > y$, donc il est impossible de construire un escalier idéal tel que $\Delta x \leq \Delta y$».

L'affirmation de Marie est-elle correcte ?

3. Dans cette question, on suppose que : $\Delta x = 25$ et $\Delta y = 42$.

a. Montrer qu'avec ces valeurs il est impossible de construire un escalier idéal ayant deux contremarches.

b. Montrer qu'avec ces valeurs il est impossible de construire un escalier idéal ayant n contremarches, quelle que soit la valeur de n ($n \geq 2$).

4. Une norme française entrée en vigueur en 2007 impose que, dans les espaces publics, les escaliers vérifient les conditions suivantes :

$$x \geq 28 \text{ et } y = 16.$$

Est-il possible de construire un escalier idéal vérifiant ces conditions ? Si oui, déterminer la mesure α de l'angle maximal, on arrondira au degré près.

5. Dans toute la suite, on cherche à déterminer pour quelles valeurs de Δx et Δy il est possible de réaliser un escalier idéal.

a. On considère un escalier idéal composé de n contremarches. Montrer que :

$$\frac{\Delta x}{n-1} + \frac{2\Delta y}{n} = 65.$$

b. On considère un escalier idéal composé de n contremarches. Montrer que :

$$65(n-1) < \Delta x + 2\Delta y \leq 65(n-1) + 40.$$

c. Est-il possible que, pour certaines valeurs de Δx et Δy, il existe deux escaliers idéaux possibles ? Justifier.

d. Montrer que l'on peut construire un escalier ayant n contremarches si, et seulement si,

$$\begin{cases} \frac{2\Delta y}{n} = \Delta x + 2\Delta y - 65(n-1) \\ \Delta x \geq 25(n-1) \\ \Delta y > 0 \end{cases}.$$

e. Est-il possible de construire un escalier idéal tel que $\Delta x = 496$ et $\Delta y = 289$? Si oui, déterminer les valeurs de n, x et y.

6. Écrire un algorithme qui, connaissant Δx et Δy, permet de déterminer si on peut construire un escalier idéal et qui permet aussi de déterminer les valeurs de n, x et y lorsque cet escalier est idéal.
On pourra utiliser les fonctions Partie Entière et Partie Décimale, dont on précise le principe de fonctionnement à travers deux exemples :

- si on choisit le nombre 3,57 alors : Partie Entière(3,57) = 3 et Partie Décimale(3,57) = 0,57 ;
- si on choisit le nombre 3 alors : Partie Entière(3) = 3 et Partie Décimale(3) = 0
  (car on peut écrire 3 = 3,0).