

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Probabilités.

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :

- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de vingt-cinq ans ;
- un forfait SÉNIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge, l'option *coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :

- 20% des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- 80 % des skieurs ont un forfait SÉNIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6% choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SÉNIOR, 12,5% choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :

- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SÉNIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3} .
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15% des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3} .
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;
Fonctions, Fonction logarithme.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil. Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15%. Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?
a. 2 heures b. 8 heures c. 9 heures d. 13 heures
- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 6$. On peut affirmer que :
a. la suite (u_n) est strictement croissante. b. la suite (u_n) est strictement décroissante.
c. la suite (u_n) n'est pas monotone. d. la suite (u_n) est constante.
- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 4 \ln(3x)$. Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :
a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$ b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$
c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$ d. $f(2x) = 2f(x)$
- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} .$$

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

La courbe \mathcal{C}_g admet :

- une asymptote verticale et une asymptote horizontale.
- une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.
- aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.
- aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; 2]$ par :

$$h(x) = x^2(1 + 2 \ln(x)) \text{ .}$$

On note \mathcal{C}_h la courbe représentative de h dans un repère du plan.

On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; 2]$.

On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; 2]$, on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)) \text{ .}$$

5. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois.

b. exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois.

d. exactement 3 fois.

6. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_h au point d'abscisse \sqrt{e} est :

a. $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$

b. $y = (6\sqrt{e}) \cdot x + 2e$

c. $y = 6 e^{\frac{x}{2}}$

d. $y = \left(6e^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4e$

7. Sur l'intervalle $]0 ; 2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_h est égal à :

a. 0

b. 1

c. 2

d. 3

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2} .$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbf{R} . On note f' sa dérivée.

- Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$.
- Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur \mathbf{R} .
On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f .
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est la fonction définie à la partie A.}$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 .$$

- En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.
- On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.
 - On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):  
    u=0  
    n=0  
    while u<=a:  
        u=1+u-exp(0.5*u-2)  
        n=n+1  
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 0; -1)$, $B(1; 4; -1)$, $C(1; 0; 3)$, $D(5; 4; 3)$ et $E(10; 9; 8)$.

1. a. Soit R le milieu du segment $[AB]$.

Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

- b. Soit \mathcal{P}_1 le plan passant par le point R et dont \overrightarrow{AB} est un vecteur normal.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_1 est :

$$x - y - 1 = 0 .$$

- c. Démontrer que le point E appartient au plan \mathcal{P}_1 et que $EA = EB$.

2. On considère le plan \mathcal{P}_2 d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

- a. Justifier que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.

- b. On note Δ la droite d'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

3. On considère le plan \mathcal{P}_3 d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.

Justifier que la droite Δ est sécante au plan \mathcal{P}_3 en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment $[ST]$.
On admet que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et \mathcal{P}_3 sont les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

- b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.