ACADÉMIE DE CORSE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2023

Partie 2

Académie de Corse

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.

À l'issue de la première partie, les copies et les énoncés sont ramassés et une pause de cinq à quinze minutes est prévue avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Cette partie est constituée de deux exercices académiques. **Tous les candidats** doivent traiter les deux exercices académiques. Leur résolution peut être **individuelle** ou par ***équipe,*** dans ce cas, chaque équipe rend une seule copie.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et il poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Cet énoncé contient 5 pages.

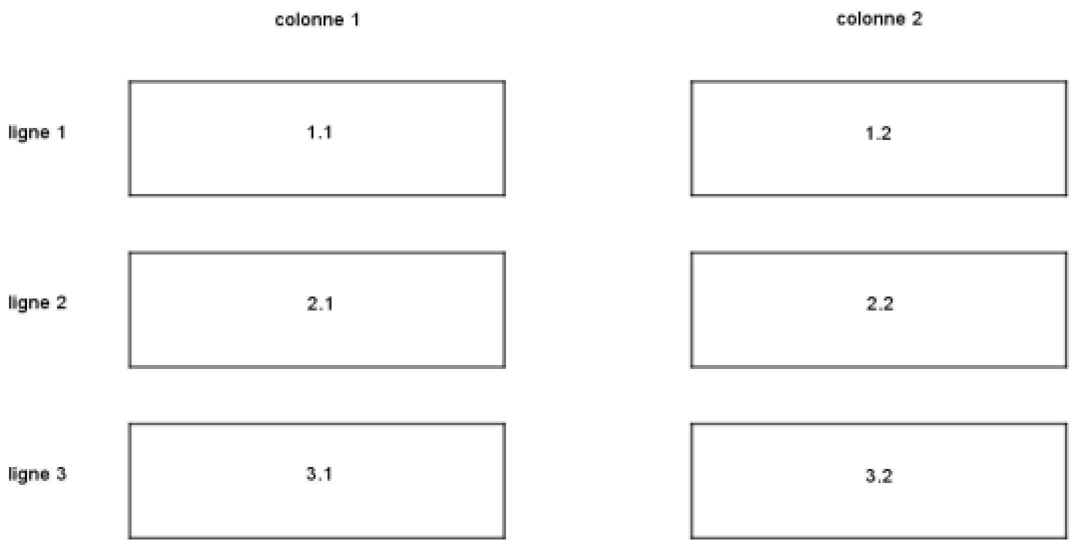
S'assurer qu'il est complet.

Exercice 1 (tous les candidats)
LE DEMENAGEMENT

Pour effectuer un déménagement, Michaël a rangé ses affaires dans des boîtes, toutes identiques.

Il les empile ensuite pour former des lignes et des colonnes ; on note n le nombre de lignes et p le nombre de colonnes. Le résultat obtenu est appelé rangement à n lignes et p colonnes.

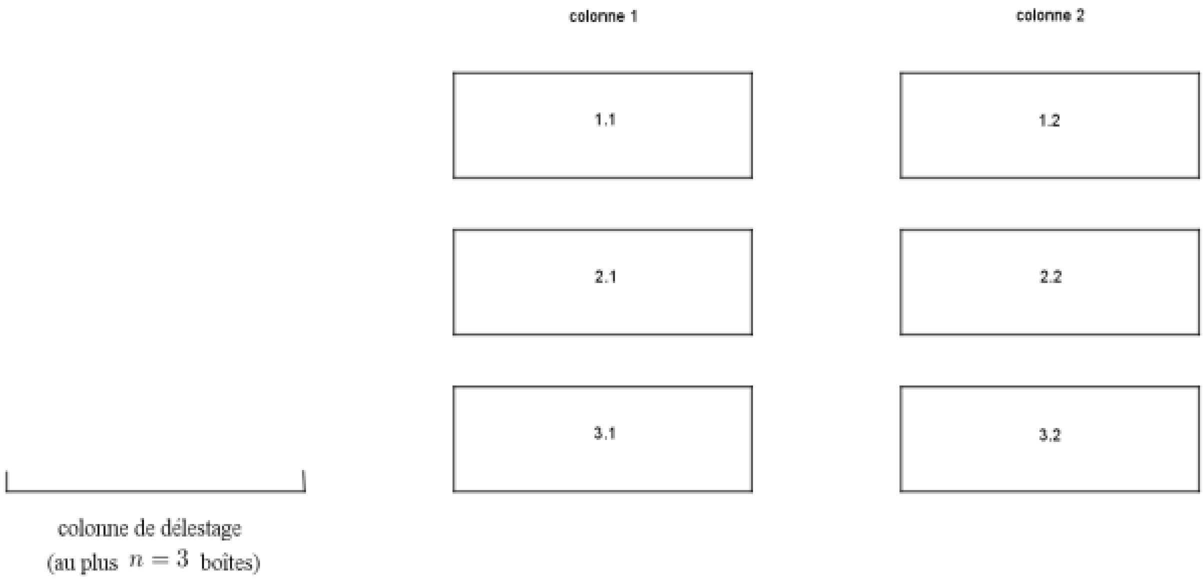
__Exemple :__ Michaël dispose de 6 boîtes. Il choisit de les empiler en 3 lignes et 2 colonnes ; on a donc $n = 3,\ p = 2$. Il numérote alors les boîtes comme ci-dessous.



Pour des raisons pratiques et pour récupérer quelques affaires, Michaël devra parfois intervertir la position de deux boîtes.

Pour cela, il dispose d'un espace lui permettant de créer temporairement une colonne supplémentaire initialement vide ; on l'appelle colonne de délestage. Cette colonne peut contenir au maximum n boîtes déposées les unes sur les autres (n est le nombre défini plus haut, il correspond au nombre de lignes).

Dans l'exemple précédent, la colonne de délestage permet de stocker au plus trois boîtes (car $n = 3$).



Dans ce problème, on cherche à savoir s'il est toujours possible d'intervertir deux boîtes du rangement en utilisant entre autres la colonne de délestage, mais en veillant à ce qu'aucune colonne ne comporte plus de n boîtes (à cause de la hauteur du plafond). De plus, on ne peut déplacer qu'une seule boîte à la fois, celle du dessus. Chaque mouvement d'une boîte est appelé déplacement.

1. Dans cette question, on reprend l'exemple du rangement à 3 lignes et 2 colonnes.

- **a.** Proposer une manière d'intervertir les boîtes 1.1 et 1.2 en 3 déplacements.
- **b.** Proposer une manière d'intervertir les boîtes 1.1 et 2.2 en 5 déplacements.
- **c.** Proposer une manière d'intervertir les boîtes 1.1 et 3.1 en 9 déplacements.
- **d.** Proposer une manière d'intervertir les boîtes 2.1 et 3.1.

2. Dans cette question on considère un rangement à 1 colonne et n lignes, où n est un nombre entier tel que $n \geqslant 2$.
Montrer qu'il est impossible d'intervertir deux boîtes.

3. Dans cette question, on considère un rangement à p colonnes et à n lignes où n est un nombre entier tel que $n \geqslant 1$ et p est un nombre entier tel que $p \geqslant 2$.

- **a.** Soient a et b deux entiers tels que $1 \leqslant a < b \leqslant n$.
  - **i.** Proposer une manière d'intervertir les boîtes $a.1$ et $b.1$ en $2b+2$ déplacements si $b = a+1$ et en $2b+3$ déplacements si $b > a+1$.
  - **ii.** Montrer qu'il est impossible de faire mieux (c'est-à-dire qu'on ne peut pas intervertir les boîtes $a.1$ et $b.1$ en moins de déplacements).

b. Soient c et d deux entiers tels que $1 \leqslant c < d \leqslant n$.
Proposer une manière d'intervertir les boîtes $1.c$ et $1.d$ en 3 déplacements.

c. Déduire des questions précédentes qu'il est toujours possible d'intervertir deux boîtes dans un rangement à p colonnes où p est un nombre entier tel que $p \geqslant 2$.

d. Soient deux boîtes distinctes numérotées $(a_1\ ;\ b_1)$ et $(a_2\ ;\ b_2)$ avec $b_1 \neq b_2$, c'est à dire que les deux boîtes ne sont pas situées sur la même colonne.

i. Montrer que si $a_1 + a_2 \leqslant n + 1$ alors on peut intervertir les deux boîtes numérotées $(a_1\ ;\ b_1)$ et $(a_2\ ;\ b_2)$ en $2(a_1 + a_2) - 1$ déplacements.

ii. Déterminer le nombre minimal de déplacements si $a_1 + a_2 > n + 1$.

Exercice 2 (tous les candidats)
EMPILEMENT DE CUBES

Partie A

1. On dispose d'une boite de 10 cubes : le premier a une arête qui mesure $\frac{1}{1^2}$ m soit 1 m, le deuxième a une arête qui mesure $\frac{1}{2^2}$ m soit 0,25 m, …, le dixième a une arête qui mesure $\frac{1}{10^2}$ m. On empile les cubes de cette boite du plus grand au plus petit en commençant toujours par le cube le plus grand (c'est-à-dire celui qui a une arête mesurant 1 m). Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 10, on note u_n la hauteur, en mètre, de l'empilement obtenu si on empile n cubes, en considérant que l'empilement ne s'écroule pas.

a. On empile les trois premiers cubes de la boite, du plus grand au plus petit. Montrer que la hauteur u_3, en mètre, de l'empilement obtenu est égale à $\frac{49}{36}$ m.

b. Calculer u_4. On donnera le résultat arrondi au cm.

c. On souhaite obtenir un empilement d'une hauteur de 2 mètres. Est-ce possible avec ces 10 cubes ?

2. On imagine que la boite contient davantage de cubes : le onzième a pour arête $\frac{1}{11^2}$ m soit $\frac{1}{121}$ m, le douzième a pour arête $\frac{1}{12^2}$ m soit $\frac{1}{144}$ m et ainsi de suite…. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n la hauteur, en mètre, de l'empilement obtenu si on empile de la même façon n cubes, en considérant toujours que l'empilement ne s'écroule pas.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} > u_n$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

c. Peut-on obtenir un empilement d'une hauteur de 2 mètres ?

Partie B

On dispose maintenant d'une boite contenant d'autres cubes : le premier a pour arête $\frac{1}{1}$ m, le deuxième a pour arête $\frac{1}{2}$ m, …, le dixième a pour arête $\frac{1}{10}$ m et ainsi de suite. On empile les cubes de cette boite du plus grand au plus petit en commençant toujours par le cube le plus grand (c'est-à-dire celui qui a une arête mesurant 1 m). Pour tout entier naturel n non nul, on note v_n la hauteur, en mètre, de l'empilement obtenu si on empile n cubes, en considérant que l'empilement ne s'écroule pas.

1. Avec ces cubes peut-on obtenir un empilement de hauteur 2 mètres ?

2. En remarquant que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, justifier que : $v_4 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

3. Justifier que : $v_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

4. En généralisant les résultats précédents, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $v_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

5. En supposant toujours que l'empilement ne s'écroule pas, déterminer un nombre suffisant de cubes permettant d'atteindre la hauteur du Monte Cinto (2706 m).

6. Trouver le nombre minimal de cubes permettant d'atteindre cette hauteur.