MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
*Liberté
Égalité
Fraternité*

IGÉSR
INSPECTION GÉNÉRALE
DE L'ÉDUCATION, DU SPORT
ET DE LA RECHERCHE

LES SIX COMPÉTENCES
DES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES

mai 2023

Ce document a été réalisé par un groupe de travail constitué d'IA-IPR de Mathématiques et d'inspecteurs généraux :
Loïc Chapellier (IA-IPR Bordeaux), Mathieu Chibrard (IA-IPR Créteil), Damien Delwarde (IA-IPR Montpellier), Frédéric Lemasson (IA-IPR Dijon), Christophe Mazuyer (IA-IPR Aix-Marseille), Gilles Ollivier (IA-IPR Nantes), Hélène Tanoh (IA-IPR Strasbourg), Xavier Sorbe (IGÉSR), Johan Yebbou (IGÉSR).

Si la réflexion sur les compétences est plus ancienne, le cadre des six compétences mathématiques a commencé à s'implanter en France de manière institutionnelle à partir de 2013 (ressources au lycée, programme des classes préparatoires ; dans une version un peu différente, dans les programmes de BTS). Une étape décisive a été leur introduction en 2016 dans les programmes de la scolarité obligatoire (cycles 2, 3, 4), avant les programmes du lycée général et technologique en 2019. Les programmes de la voie professionnelle contiennent un cadre des compétences un peu différent, commun aux mathématiques et aux sciences physiques. Les programmes en vigueur sont les documents de référence qui décrivent les compétences pour les niveaux concernés. Il est aussi utile de se reporter aux documents d'accompagnement sur les compétences travaillées au cycle 4.

L'objet du présent document est de mieux expliciter ces compétences, en complément des références précédentes, afin de conforter leur prise en compte dans la formation des élèves et de mieux les identifier comme de véritables objectifs d'apprentissage. Prendre en compte les compétences doit permettre de s'inscrire dans la logique du triptyque Manipuler-Verbaliser-Abstraire pour faire progresser le plus grand nombre.

Les cartes mentales

Pour chaque compétence, une carte mentale est construite sur trois branches principales : description, ressources, observables.

La *description* est déclinée à l'aide de verbes à l'infinitif.
Les *ressources* indiquent des connaissances et des outils auxquels l'élève peut faire appel pour exercer la compétence.
Les *observables* se réfèrent à l'observation par le professeur de l'activité de l'élève lorsque, confronté à une tâche, un exercice, un problème, celui-ci doit mobiliser une ou plusieurs compétences.

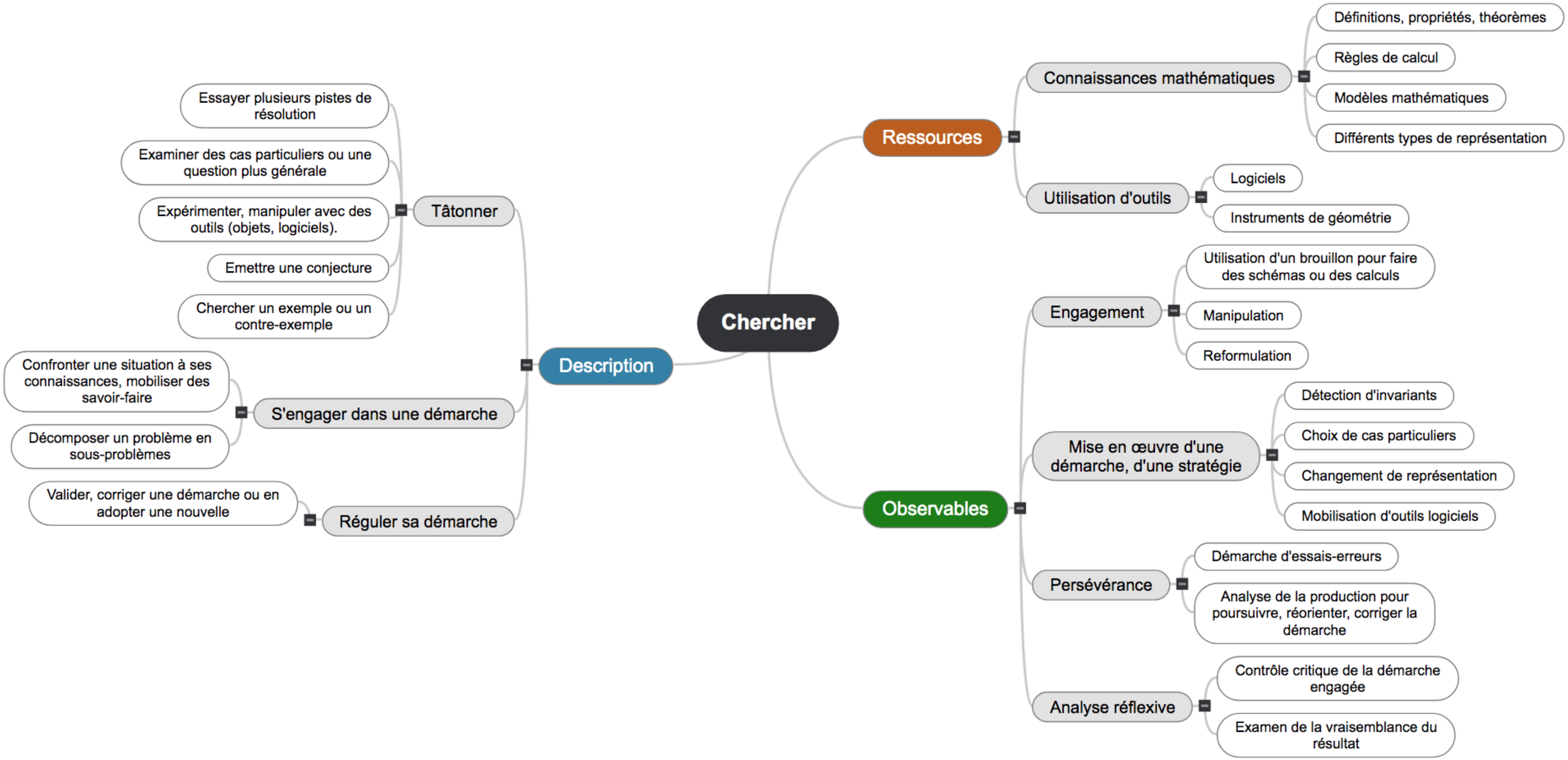
Bien entendu, des cas de chevauchement entre compétences peuvent se rencontrer.

Les exercices

Des exercices sont proposés afin d'illustrer la mise en œuvre des compétences. Celles-ci sont abordées de façon d'autant plus pertinente si une certaine marge d'initiative est laissée à l'élève. La plupart des tâches qui peuvent être proposées, et notamment les plus riches, sollicitent une combinaison des compétences, et, si on peut choisir un exercice pour travailler particulièrement une compétence, il n'est pas toujours judicieux de vouloir limiter l'activité à celle-ci.
Par ailleurs, un choix d'observables par le professeur est souhaitable afin d'expliciter les critères de réussite.
Le niveau de classe de ces exercices n'est pas précisé dans la mesure où ceux-ci peuvent être adaptés à différents niveaux.

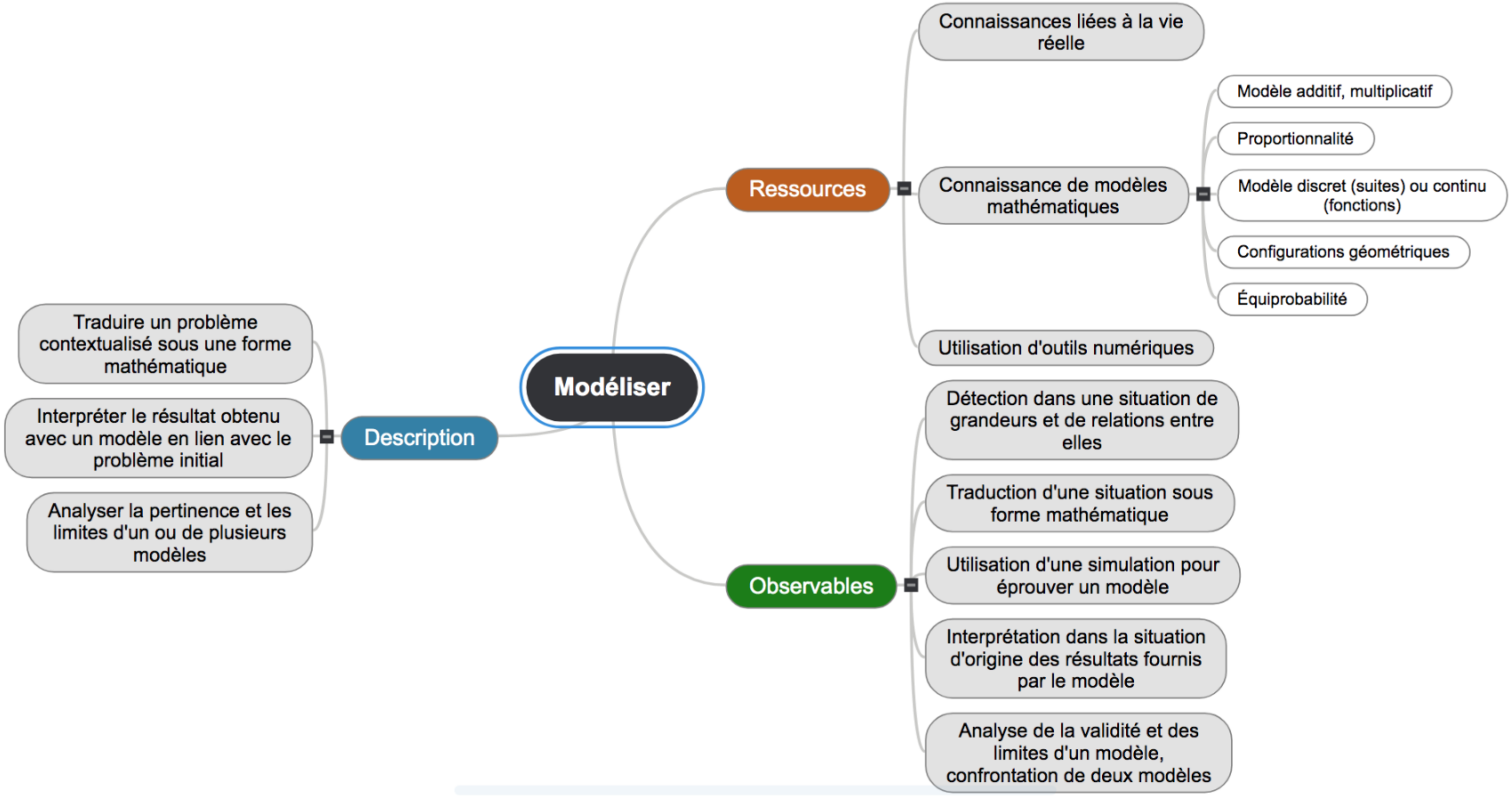
Chercher

La compétence « chercher » correspond au temps d'activité au cours duquel l'élève, après s'être approprié l'énoncé d'un problème, s'efforce de trouver des idées et développe des stratégies pour le résoudre. Cette phase essentielle précède ou accompagne la mise en œuvre d'autres compétences, parfois tout au long du travail sur le problème. Si le repérage de cette activité n'est pas toujours aisé, un temps suffisant doit néanmoins lui être consacré, dès l'école, pour permettre à l'élève de s'engager dans une démarche d'essais sans craindre de se tromper.



Modéliser

La compétence « modéliser », au sens de « mathématiser », porte sur le lien qui s'établit entre le réel et les mathématiques. Il s'agit de choisir les concepts mathématiques permettant de décrire une situation issue du monde réel. Ainsi la reconnaissance d'une situation additive dès le cycle 2 ou de proportionnalité au cycle 3, s'inscrivent dans une démarche de modélisation. Il en va de même lorsqu'on travaille à propos d'un terrain de football en considérant un rectangle, à condition de disposer d'une définition et de propriétés permettant d'exploiter la connaissance de cette figure. L'enseignement scientifique au lycée procure de nombreuses situations donnant lieu à une modélisation.
Après le traitement mathématique du problème posé, la compétence « modéliser » consiste aussi à confronter au monde réel les résultats obtenus avec le modèle pour éventuellement remettre celui-ci en question.

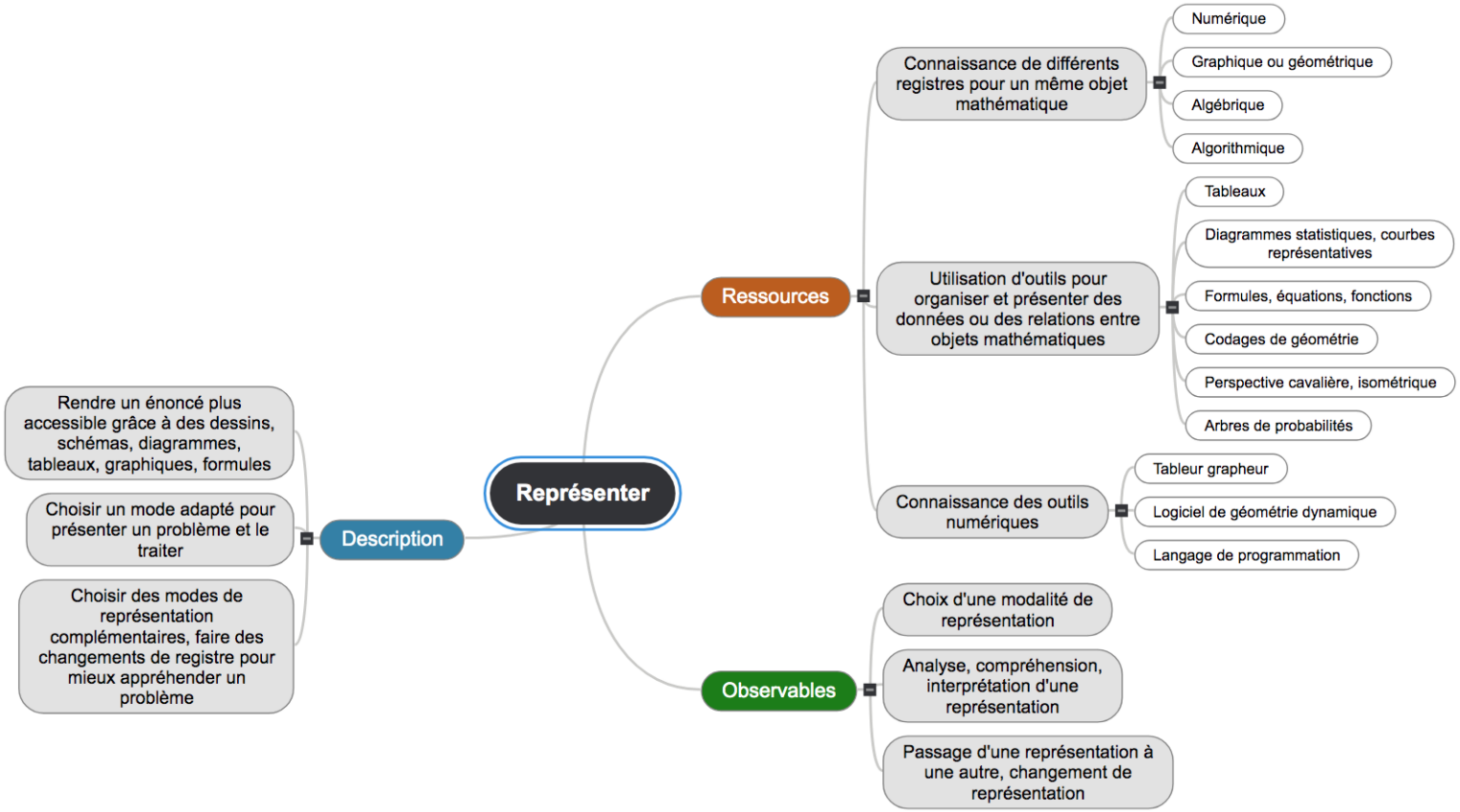


Représenter

La compétence « représenter » correspond au choix de certains outils et à leur utilisation pour donner à voir des objets mathématiques. Les représentations peuvent appartenir à différents registres : graphique, langage naturel, numérique, écriture symbolique, etc.

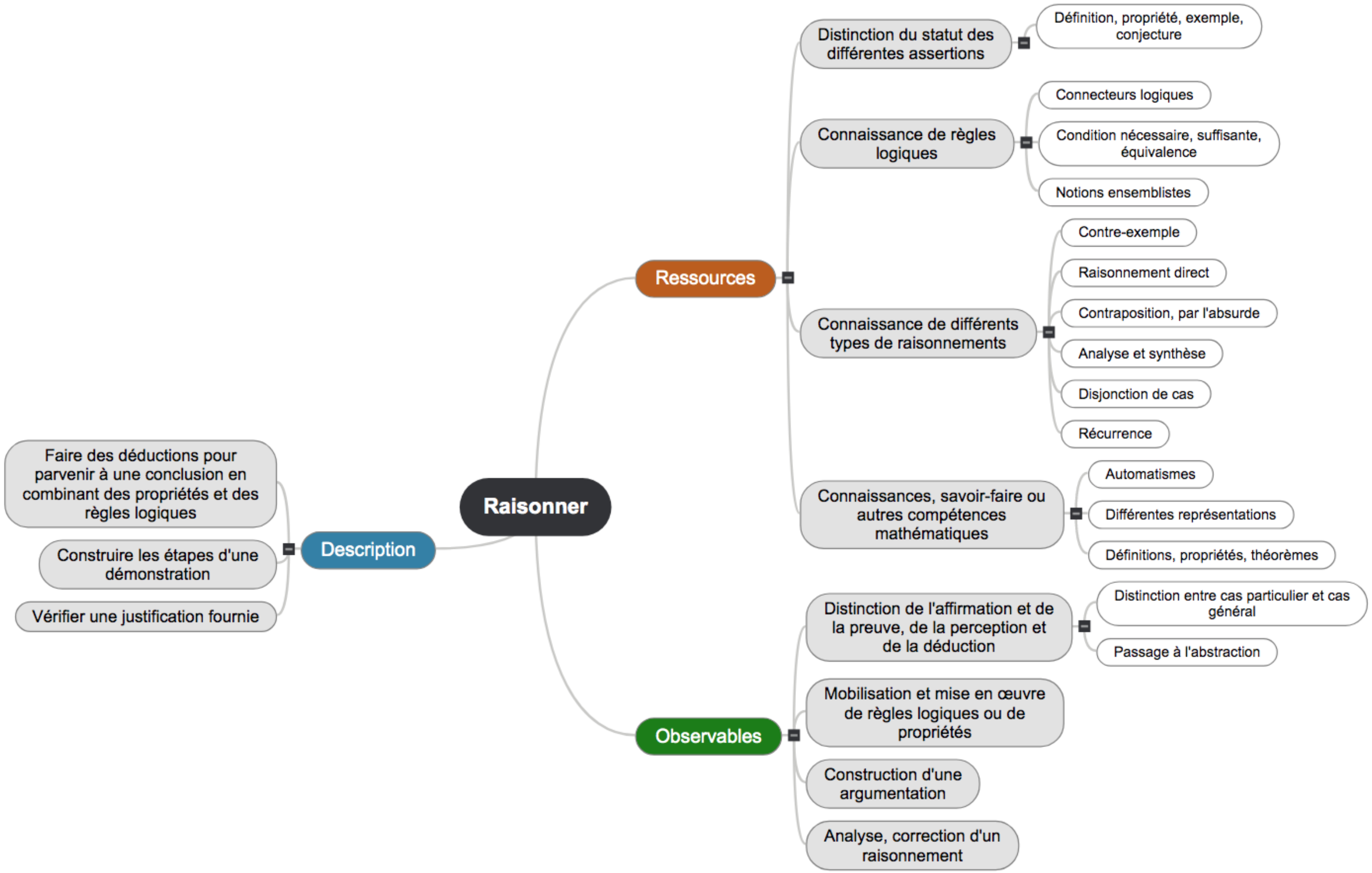
La compétence « représenter » opère sur des objets mathématiques, ce qui la distingue de la compétence « modéliser » qui établit un lien entre le monde réel et des concepts mathématiques. Par exemple, à l'école primaire, la représentation à l'aide d'un « schéma en barre » est un moyen efficace pour résoudre notamment certains problèmes additifs.

Les compétences « modéliser » et « représenter » peuvent être difficiles à distinguer lorsque la situation réelle est si proche du modèle mathématique (« pseudo-réel ») que le travail de modélisation est minime ou lorsque la modélisation est prise en charge par l'énoncé, par exemple lorsqu'on modélise un champ rectangulaire par un rectangle ou un lancer de dé équilibré par un univers avec équiprobabilité.



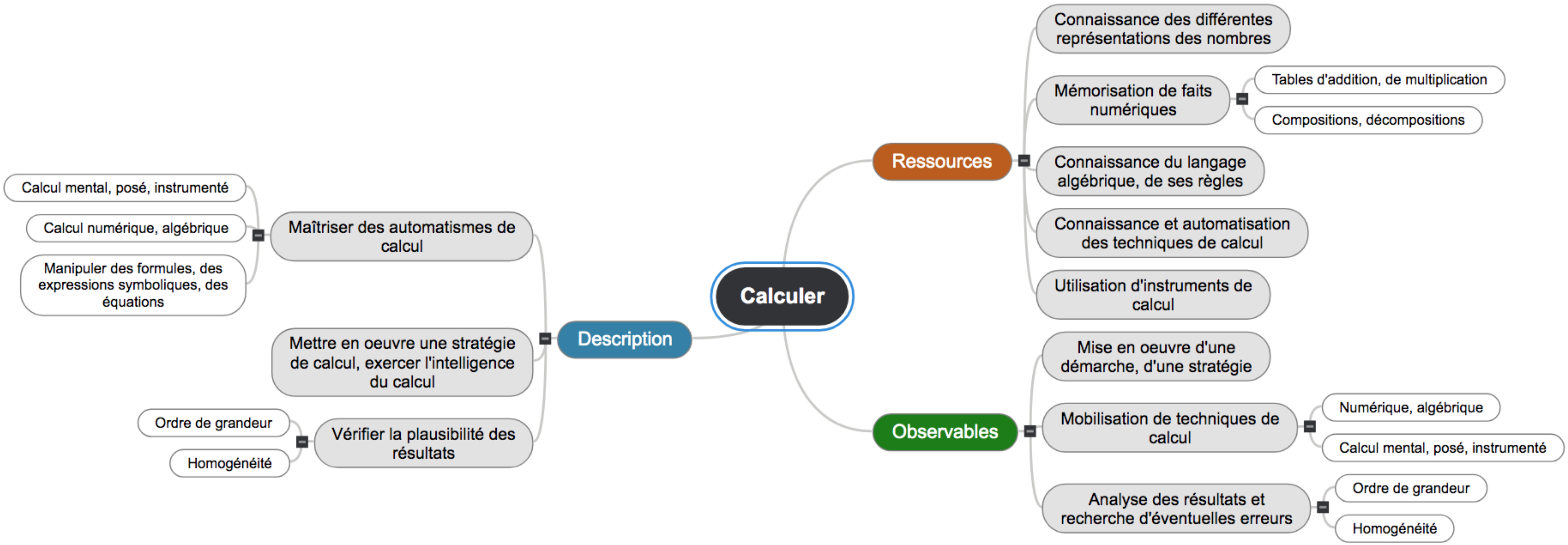
Raisonner

La compétence « raisonner », au sens de « raisonner/argumenter », doit être comprise autour de l'idée de déduction : obtenir une conclusion en combinant des propriétés et des règles logiques. La formalisation des raisonnements est plus ou moins élaborée selon les niveaux de scolarité. Si la conception d'une démonstration se rattache à la compétence « raisonner », sa rédaction aboutie relève davantage de la compétence « communiquer ».



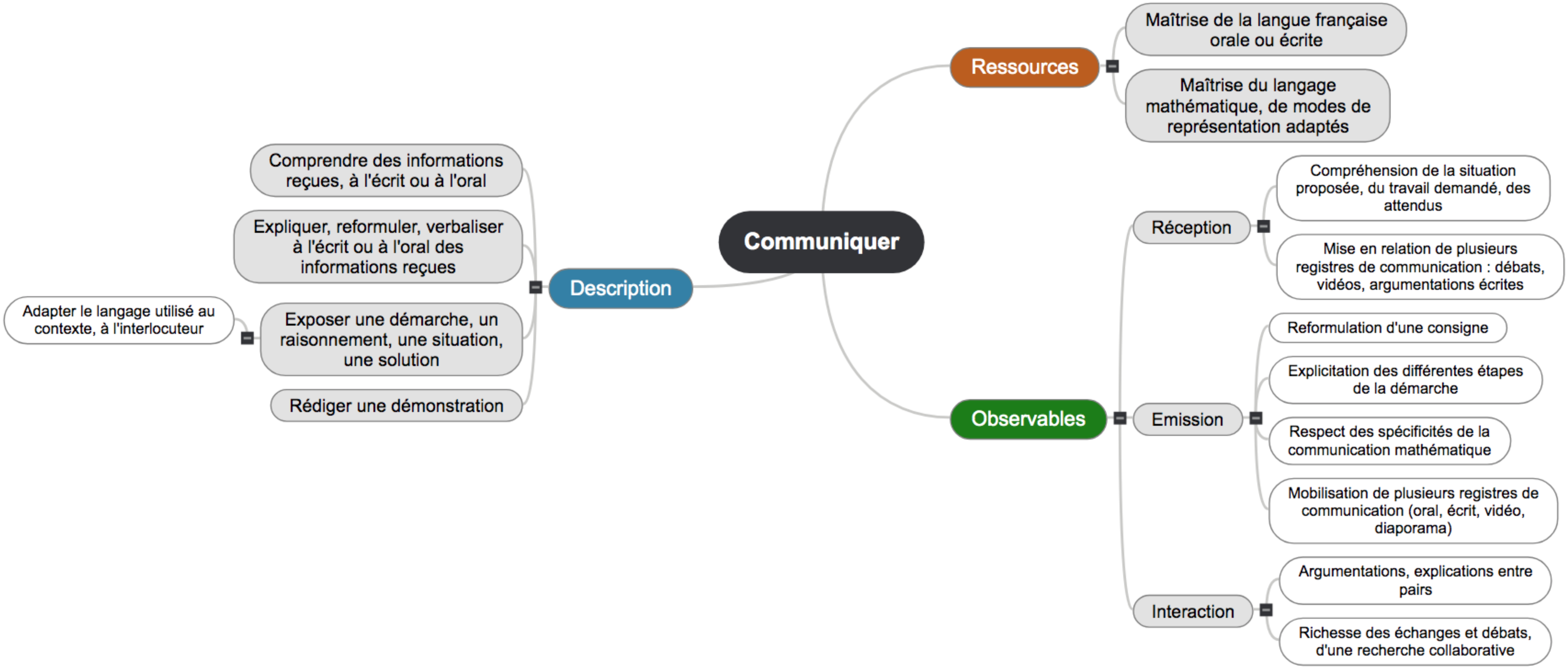
Calculer

La compétence « calculer » porte sur des ensembles de nombres, dont le répertoire s'enrichit au fil de la scolarité.
À partir du cycle 4, le calcul algébrique en constitue un champ d'application de plus en plus important.
Quel que soit le niveau considéré, l'exercice de cette compétence prend appui sur la maîtrise d'automatismes.



Communiquer

La compétence « communiquer » est à interpréter dans son acception la plus large. À l'écrit comme à l'oral, l'élève est tour à tour *récepteur*, par exemple lorsqu'il s'approprie des informations, et *émetteur*, lorsqu'il présente sa démarche ou expose une solution.
L'exercice de cette compétence ne se limite pas à l'emploi de la langue naturelle, mais concerne aussi bien le langage mathématique que le bon usage de modes d'expression spécifiques (tableau, diagramme, etc.) pour expliquer et convaincre.



Quelques exemples d’exercices

Parfumerie

d'après une activité de l'académie de Strasbourg

*À travers ses questions ouvertes, cet exercice paraît particulièrement indiqué pour mettre l'accent sur la compétence **Chercher**, en ménageant un temps suffisant qui permettra d'expérimenter sur des cas particuliers et d'émettre une conjecture.*
*La compétence **Calculer** sera également mobilisée, dans le cadre numérique et algébrique.*

Dans une parfumerie on propose deux promotions différentes pour l'achat de deux articles.

Formule 1 : une réduction de 20% sur le montant total à payer.
Formule 2 : une réduction de 50% sur le prix du second article.

Quelle est la formule la plus intéressante ?
(a) dans le cas particulier où les prix des deux articles sont identiques ;
(b) dans le cas où le premier article coûte 20 € de plus que le second.

Point mobile

*Cet exercice peut dans un premier temps donner lieu à la mise en œuvre de la compétence **Chercher** en expérimentant à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. L'élève est ensuite conduit à essayer des pistes de résolution en faisant appel à la connaissance de propriétés géométriques, puis à **Raisonner** en faisant des déductions qui lui permettent de construire les étapes d'une démonstration.*

ABC est un triangle rectangle en A. On donne AB=4 et AC=8. M est un point du segment [AB] ; les points N et P appartiennent respectivement aux segments [BC] et [AC] de façon que AMNP soit un rectangle.
Existe-t-il une position du point M pour laquelle AMNP est un carré ?

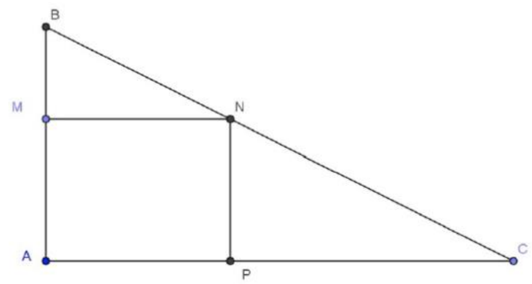


Tableau de nombres

d’après le rallye mathématique de Bourgogne 2020

Cet exercice d’un énoncé accessible est particulièrement ouvert.
En l’absence d’indications, celui-ci se prête à mobiliser la compétence ***Chercher*** *où l’on va expérimenter à travers le cas particulier des premiers nombres en vue de mettre au point une stratégie. Celle-ci conduira à* ***Représenter*** *cette situation en changeant de registre sur la voie d’une généralisation qui permettra de mieux appréhender le problème posé.*

On écrit la suite des nombres entiers « en spirale » de la façon suivante.

1	2	9	10	25	26
4	3	8	11	24	
5	6	7	12	23	
16	15	14	13	22	
17	18	19	20	21	

Quel est le nombre écrit à l'intersection de la 100ème ligne et de la 100ème colonne ?

Bactéries

d’après le rallye mathématiques sans frontières de l’académie de Strasbourg

Il s’agit ici d’une situation issue de la biologie, qui nécessite une mathématisation de l’énoncé pour pouvoir être traitée.
Il convient donc de faire appel à la compétence ***Modéliser*** *pour retenir la notion du programme qui permet de traduire le plus efficacement ce problème.*
Le choix du modèle pourra conduire à ***Représenter*** *l’évolution des différents types de bactéries à l’aide d’un tableur, ou au moyen d’un graphique, ou en concevant un algorithme.*

Dans le cadre d’une recherche sur la reproduction d’un virus, on s’intéresse à trois types de bactéries A, B et C.
Au départ, il y a autant de bactéries de chaque type, mais ensuite :

- le nombre de bactéries de type A double toutes les deux heures ;
- le nombre de bactéries de type B triple toutes les trois heures ;
- le nombre de bactéries de type C est multiplié par cinq toutes les cinq heures.

Quelle est le type de bactérie dont la population se développe le plus vite ?

Parquet

d'après Phare 5^{e}, édition Hachette

*L'exercice suivant, que l'on peut poser au cycle 3, permet de se concentrer sur la compétence **Modéliser** à travers la reconnaissance de situations additives et multiplicatives dans les questions 1 et 3.*
*Le modèle pertinent étant choisi, on peut mobiliser la compétence **Calculer** pour répondre aux questions 2 et 4.*

Pour poser du parquet dans un appartement de 32m², on va acheter les produits mentionnés ci-dessous aux tarifs indiqués.

Parquet : 12,85 € le m²
Colle : 18,20 € le pot (pour 20 m²)
Vernis : 12,70 € le pot de 5 litres (pour 8 m²)
Durcisseur : 38,40 € le pot (pour 12 m²)

1- Indiquer ce que permet de calculer chacune des expressions :
   A = 12,85 x 32 B = 18,2 : 20
   C = 18,2 x 2 D = 12,7 : 5
2- Déterminer combien on doit acheter de pots :
   a) de colle ; b) de vernis ; c) de durcisseur ;
3- Écrire une expression qui permet de calculer le montant des achats.
4- Calculer le montant des achats.

Pierre et Blaise

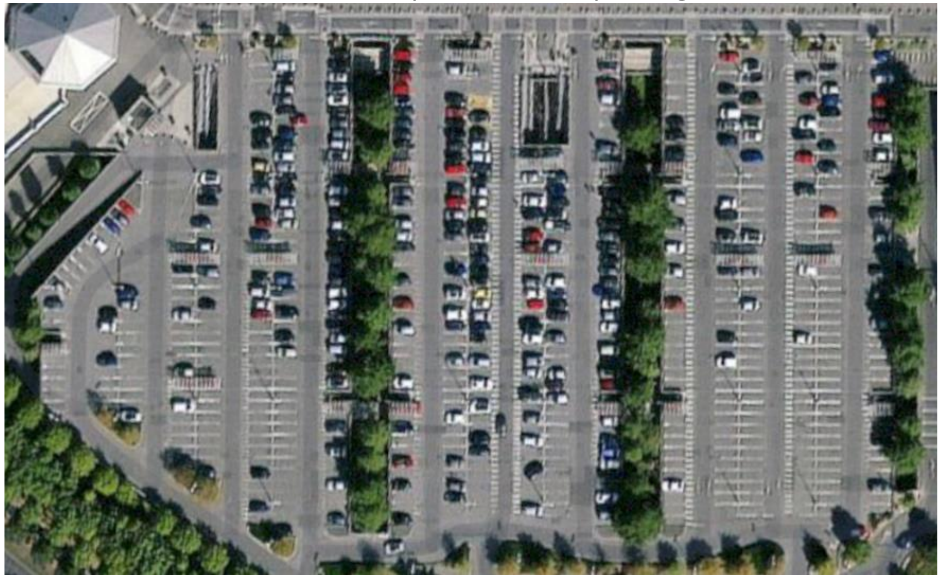
L'exercice suivant est inspiré par une correspondance historique entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal. Les deux mathématiciens proposent une résolution différente du « problème des partis » qu'on retrouve dès le XV^{e} siècle dans des textes italiens.
*Le débat que peut faire naître cet énoncé doit conduire à **Modéliser** afin de traiter le désaccord. Selon la démarche envisagée, on pourra mettre en jeu des probabilités conditionnelles ou mettre à jour la notion d'espérance.*
Des productions d'élèves sont analysées sur le site de l'académie de Nantes.

Sur le quai de la gare, deux amis jouent à un jeu de dés avec pour enjeu un paquet de 50 bonbons. Chacun lance un dé à six faces et celui qui obtient le meilleur score remporte une manche. En cas d'égalité, la manche est annulée et on recommence un tour. Le premier arrivé à 3 manches gagnantes sera déclaré vainqueur de la partie.
Le jeu est vite lancé, mais à cause des égalités la partie s'allonge et bientôt le train rentre en gare et les deux amis doivent se séparer.
À ce moment, Pierre a gagné deux manches et Blaise une seule.
Pierre déclare qu'il est le plus proche du but et doit donc être déclaré vainqueur. Blaise pense que la partie n'est pas terminée et qu'il faut partager le paquet de bonbons.
Comment trancher leur désaccord ?

Parking

Cet exercice, qui relève d'une « tâche complexe » où l'initiative la plus complète est laissée aux élèves, peut s'avérer très riche sous réserve de structurer l'organisation de la classe de façon adaptée.
*Ainsi, on gagnera à favoriser un débat, par exemple en instaurant des travaux de groupe qui permettront de confronter à l'oral des propositions de nature différente. On associera de la sorte les compétences **Chercher**, avec ici une dimension collective, et **Communiquer**.*
*Ces échanges doivent assez rapidement permettre de **Modéliser** la situation proposée, à travers le choix de figures géométriques pertinentes qui conduira à **Calculer** des aires en vue d'obtenir l'estimation attendue. Pour terminer, on ne manquera pas d'apprécier la plausibilité du résultat obtenu.*

Donner une estimation de la superficie de ce parking.



Feuilles de papier

*Cet exercice illustre la compétence **Modéliser** à un niveau assez élémentaire : il s'agit d'introduire d'abord des divisions par 2 successives, puis de déterminer la masse demandée par le modèle de la proportionnalité, phase au cours de laquelle la compétence **Calculer** est sollicitée.*
*La lecture de l'énoncé peut présenter des difficultés pour les élèves et demande d'activer la compétence **Communiquer** dans sa forme en réception.*

*L'exercice peut se prolonger en une version plus avancée et difficile, où on demande le format (rapport de la longueur à la largeur), ou les dimensions d'une feuille A4. Cette version, outre les compétences déjà mentionnées, fait intervenir la compétence **Représenter.***

On trouve dans le commerce des feuilles rectangulaires de papier de type A (feuilles A3, A4, A5, etc.).
La feuille de type A la plus grande, notée A0, est la feuille utilisée en France, depuis Napoléon Bonaparte, pour les plans de cadastres.
Une feuille A0 a une aire de 1m².
Une feuille A1 est obtenue en coupant en deux une feuille A0 selon l'axe de symétrie passant par le milieu du plus grand côté ; une feuille A2 est obtenue en coupant en deux, de la même manière, une feuille A1, et ainsi de suite.
Quelle est la masse d'une ramette de 500 feuilles A4 de 80 grammes par m² ?

Point fixe

*Cet exercice relève du programme de spécialité de terminale et permet de solliciter la compétence **Représenter** en même temps que la compétence **Chercher**.*
Il est en effet judicieux de traduire graphiquement les hypothèses de l'exercice et la question qui est posée : l'élève peut tracer un exemple de courbe $\mathcal{C}$ représentative de fonction de façon à vérifier les hypothèses, remarquer que $\mathcal{C}$ est incluse dans le carré $[0\,;1]^2$, que la question du point fixe se traduit comme un croisement entre $\mathcal{C}$ et la diagonale Δ d'équation $y = x$, que le point d'abscisse 0 de $\mathcal{C}$ (respectivement d'abscisse 1) est au-dessus (au-dessous) de Δ.
*Par ailleurs, la recherche d'un point fixe se traduit sous forme de l'équation $f(x) = x$, qui peut se transformer en $f(x) - x = 0$, qui conduira à introduire la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Le passage par une équation, puis par une fonction auxiliaire s'appuie encore sur la compétence **Représenter** et aussi, sous une forme réduite mais importante sur la compétence **Calculer.***
*Dans la phase suivante, l'élève, s'appuyant sur ses connaissances sur le théorème des valeurs intermédiaires, doit combiner ces éléments pour l'appliquer à la fonction g et avec la compétence **Raisonner** pourra établir l'existence d'un point fixe.*

On appelle point fixe d'une fonction f définie sur un intervalle I tout réel a appartenant à I tel que $f(a) = a$.

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout x appartenant à $[0\,;1]$. La fonction f admet-elle un point fixe ?

Épargne

Cet exercice propose d'étudier une évolution en s'appuyant sur des outils logiciels : tableur, programmation Python.
*Il sollicite la compétence **Représenter** car il s'agit de traduire une situation donnée sous forme textuelle (l'énoncé) sous forme tableur ou sous forme programme Python.*
*Bien entendu, il y a ici implicitement un modèle d'évolution dont l'étude pourrait être un prolongement de l'exercice : introduction d'une suite définie par récurrence (compétence **Modéliser**) recherche d'une expression du terme général de cette suite (compétences **Calculer**, **Raisonner**)*

Ce 1er janvier, les parents de Dominique ont ouvert à son nom un livret d'épargne au taux d'intérêt annuel de 4,8 %.
Ils ont déposé 600 € à l'ouverture du compte et déposeront dans les prochaines années 100 € chaque 1er janvier.
Dominique se demande au bout de combien d'années le montant du livret d'épargne aura triplé.
Conjecturer la réponse :

- à l'aide d'un tableur ;
- en réalisant un programme en Python.

Carré multiplicatif

d'après les olympiades de l'éducation prioritaire, académie de Créteil

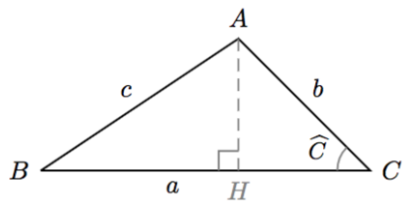
*Cet exercice combine les compétences **Chercher**, **Raisonner**, **Calculer**.*
*La compétence **Chercher** est fortement sollicitée par l'absence d'indication de solution, demandant à l'élève de prendre des initiatives, essayer des pistes, tâtonner etc.*
*La compétence **Raisonner** apparaît quand l'élève réalise que l'énoncé impose des contraintes qu'il peut exploiter pour obtenir des résultats partiels et avancer progressivement. Il peut ainsi commencer par déduire la position de l'entier 7 de l'examen des multiples de 7 parmi les nombres indiqués comme produits d'une ligne ou d'une colonne. Il peut être amené à examiner plusieurs cas, à organiser une discussion.*
*Dans cette phase, des calculs sont nécessaires, d'où un travail sur la compétence **Calculer**.*

Placer dans la grille ci-dessous les entiers de 1 à 9 de façon à obtenir les résultats indiqués en multipliant les nombres d'une même ligne ou d'une même colonne.

			→ 54
			→ 160
			→ 42
↓ 56	↓ 90	↓ 72	

Aire d'un triangle

*L'activité suivante vise à faire travailler la qualité de la rédaction et donc la compétence **Communiquer.***
*Afin de valoriser la compétence **Communiquer**, on a limité ici la phase de recherche d'une démonstration (qui concernerait les compétences **Chercher** et **Raisonner**) en donnant dans le texte l'argument principal.*



Sachant que l'aire d'un triangle est égale au demi produit de la base par la hauteur, rédiger une démonstration permettant de montrer que l'aire du triangle ABC peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

On prendra soin de définir les objets mathématiques utilisés et de justifier avec précision les différentes étapes du raisonnement.

Équation du troisième degré

d’après un sujet du baccalauréat 2022

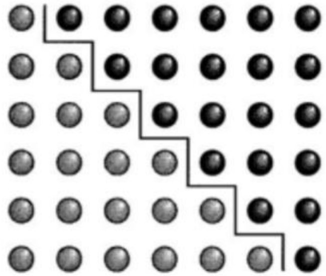
Cet exercice classique de terminale mobilise dans un premier temps la compétence ***Calculer*** *lorsqu’on détermine l’expression de la fonction dérivée, son signe et les valeurs aux bornes de l’intervalle.*
Pour justifier le résultat, l’élève peut ensuite faire appel au théorème des valeurs intermédiaires en indiquant soigneusement que les hypothèses sont ici vérifiées.
On peut aussi convenir que les flèches obliques du tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré et que la simple référence à ce tableau de variation suffit pour justifier l’existence et l’unicité de la solution.
Cette dernière approche conduit à mettre en œuvre la compétence ***Communiquer*** *dans un registre scientifique en s’appuyant sur la puissance d’un outil de représentation mathématique.*
On procède de même lorsque dans un exercice de probabilités, on admet qu’un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve, en faisant intervenir implicitement les propriétés entourant les probabilités conditionnelles.

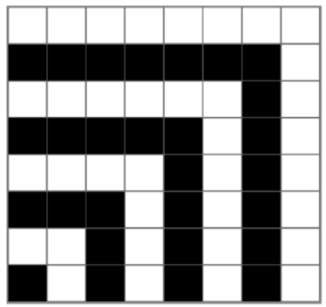
Justifier que l’équation $x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$ admet une unique solution sur l’intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Sommes d’entiers

Cet exercice, à l’énoncé particulièrement ouvert peut favoriser sur plusieurs plans la mise en œuvre de la compétence ***Communiquer****. Un débat riche peut être instauré dans la classe en vue de déterminer la formule induite par chacune de ces figures. La formalisation mathématique conduit à un effort d’expression qui conduira à* ***Représenter*** *cette situation dans un registre algébrique en vue d’aboutir à la généralisation souhaitée. Selon les objectifs fixés par le professeur, cette activité peut se limiter à la mise en évidence d’une formule reposant sur l’analyse de ces figures dans le cadre d’une « preuve sans mots » qui apparaît suffisamment convaincante.*

Quelles propriétés sur des sommes d’entiers naturels pourrait-on démontrer en utilisant les figures suivantes ?





Cylindres

d'après une ressource de l'académie de Montpellier

À travers ses étapes successives, cette activité vise principalement à travailler la compétence ***Communiquer****, notamment à l'oral.*
Les compétences ***Chercher*** *et* ***Calculer*** *sont aussi mobilisées.*

La séquence peut donner lieu à un travail par groupes, propice à l'instauration d'un débat, dans lequel les élèves s'expriment pour faire des propositions et écoutent les autres pour chercher à comprendre leur point de vue.
La réalisation d'une vidéo permet de communiquer aussi bien comme récepteur que comme émetteur, à l'écrit et à l'oral.

Avec une feuille au format A4, il y a deux façons de réaliser un cylindre.
Laquelle de ces deux façons permet-elle d'obtenir le plus grand volume ?

Réaliser une courte vidéo dans laquelle on présentera de façon motivante le problème posé et où l'on exposera ensuite une démarche de résolution même si celle-ci n'a pas abouti.