ACADÉMIE DE CORSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2024

Académie de Corse
Partie 2

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés, distribués puis ramassés à des moments différents.
Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques.
À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue avant la seconde partie à l'issue de laquelle les copies et les énoncés sont également ramassés.

Cette épreuve dure deux heures. Les candidats individuels ou en groupe doivent traiter les deux exercices. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions des deux exercices pour obtenir en fin de compte la note maximale ou une appréciation maximale.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. Il est également conseillé d'accorder autant de temps aux deux exercices.

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur la copie en expliquant les initiatives qu'ils ont été amenés à prendre et poursuivent la composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'énoncé et les annexes doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

L'énoncé académique comporte 6 pages.
S'assurer que le sujet est complet.

Exercice 1 : Les nombres ploutons

Dans cet exercice, on s'intéresse aux entiers naturels non nuls qui possèdent « beaucoup » de diviseurs. On les appelle **nombres ploutons**.

La définition exacte de tels nombres est la suivante :

Un **nombre plouton** est un entier naturel non nul qui possède strictement plus de diviseurs que **tous** les entiers naturels non nuls qui lui sont inférieurs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs du nombre n.

On rappelle qu'un entier naturel non nul p est **premier** si, et seulement si, $d(p) = 2$.

Par exemple :

- 3 n'est pas un nombre plouton car $d(3) = d(2) = 2$, 3 n'a donc pas strictement plus de diviseurs que tous ses prédécesseurs.
- 4 est un nombre plouton car $d(4)=3$ et $d(4)> d(3)$, $d(4)> d(2)$, $d(4)>d(1)$.

Partie A - Les petits ploutons

1. Compléter le tableau de **l'annexe 1** et donner les cinq premiers nombres ploutons classés dans l'ordre croissant.

2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre premier autre que 2 qui soit un nombre plouton.

3. Quel est le nombre plouton qui succède à 12 ?

4. L'objectif de cette question est de déterminer s'il existe ou non une infinité de nombres ploutons.

a. Soit k un entier naturel, justifier que $d(2^k) = k + 1$.

b. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres ploutons. Dans ce cas on note N le plus grand nombre plouton et on note $k = d(N)$. Mettre en évidence une contradiction.

c. Existe-t-il une infinité de nombres ploutons ?

Partie B - Les ploutons inférieurs ou égaux à 200

Dans cette partie, on souhaite obtenir la liste de tous les nombres ploutons inférieurs ou égaux à 200. On admet la propriété suivante :

Si n est un nombre plouton inférieur ou égal à 200 alors il existe des entiers naturels a, b et c tels que $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$.
Une telle écriture $2^a \times 3^b \times 5^c$ est appelée **décomposition** de n.

Par exemple, $2^2 \times 3^0 \times 5^0$ est la décomposition du nombre plouton 4.

1. Donner les décompositions des cinq premiers nombres ploutons.
2. Est-il vrai que si $n = 2^a \times 3^b \times 5^c$ avec a, b et c entiers naturels avec $n \leq 200$ alors n est nécessairement un nombre plouton ? Justifier la réponse.

> Soit n un nombre inférieur ou égal à 200 admettant pour décomposition $2^a \times 3^b \times 5^c$. d est un diviseur positif de n si, et seulement si, il existe des entiers naturels α, β et γ tels que $\alpha \leq a$, $\beta \leq b$, $\gamma \leq c$ et $d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$.
> Si d est un diviseur positif de n alors l'écriture $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ est appelée **décomposition** de d.

Par exemple, on considère $n = 2^3 \times 3^0 \times 5^1 = 40$, le nombre $d = 2^2 \times 3^0 \times 5^1 = 20$ est un diviseur positif de n.

3. On considère le nombre $2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$.
   Dresser la liste des douze diviseurs de 60 en indiquant leur décomposition.
4. Est-il vrai que tous les nombres entiers naturels non nuls et inférieurs ou égaux à 200 admettent une décomposition de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ où a, b et c sont des entiers naturels ? Justifier la réponse.
5. Soit n un nombre plouton admettant une décomposition de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$. Montrer que $d(n) = (a+1) \times (b+1) \times (c+1)$.
6. Montrer que si n est un nombre plouton alors $a \geq b \geq c$.
7. Montrer que 30 vérifie les conditions de la question précédente mais n'est pas un nombre plouton.
8. Compléter le tableau de l'**annexe 2** contenant les 21 nombres inférieurs à 200 admettant une décomposition de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$.
9. Déterminer les onze nombres ploutons inférieurs à 200.

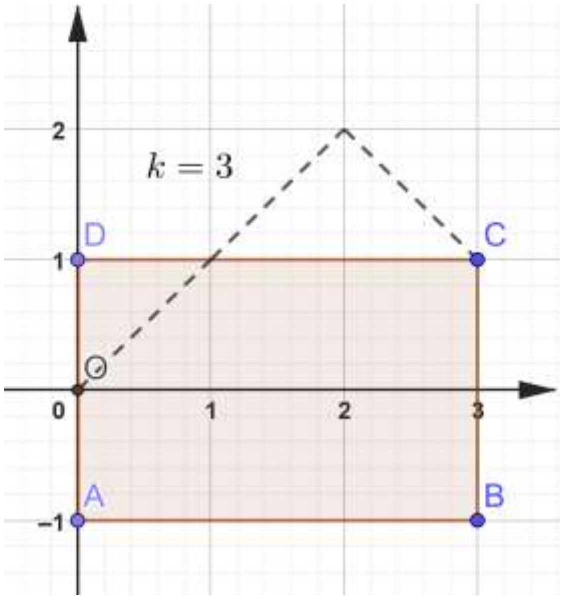
Exercice 2 : Parcours gagnants

Dans cet exercice, on se place dans un repère orthonormé d'origine O et n désigne un entier naturel non nul.

Max le robot est positionné initialement au point O. Il enchaîne n translations consécutives choisies de manière aléatoire et équiprobable parmi les translations de vecteurs $\vec{u}$ (1 ; 1) ; $\vec{v}$ (1 ; 0) ou $\vec{w}$ (1 ; -1).
Max le robot parvient au point d'arrivée d'abscisse n.

On appelle **parcours** une liste ordonnée de n vecteurs choisis parmi les vecteurs $\vec{u}$ (1 ; 1) ; $\vec{v}$ (1 ; 0) ; $\vec{w}$ (1 ; -1). On dit alors que le parcours est de **taille** n.

Dans le repère orthonormé ci-dessous est représenté un exemple de parcours de longueur 3 de Max : $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$. Le point d'arrivée de Max est le point de coordonnées (3 ; 1).



Un parcours de taille n est dit **gagnant** si Max n'est jamais sorti du rectangle ABCD, bords inclus, où A $(0\,;-1)$, B$(n\,;-1)$, C$(n\,;1)$, D$(0;1)$.

Ainsi le parcours $(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w})$ n'est pas gagnant alors que le parcours $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ est gagnant.

L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité qu'un parcours de taille n donnée soit gagnant.

Partie A - Cas *où* $n = 3$ Dans cette partie, on fixe $n = 3$.

1. Combien a-t-on de parcours possibles ?
2. Citer les parcours gagnants dont le premier vecteur est $\vec{u}$.
3. Citer les parcours gagnants dont le premier vecteur est $\vec{v}$.
4. En déduire que la probabilité qu'un parcours de taille 3 soit gagnant est égale à $\frac{17}{27}$.

Partie B - Calculs de proche en proche

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

On note :

- a_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée a pour coordonnées $(n\,;1)$;
- b_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée a pour coordonnées $(n\,;0)$;
- c_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants et dont le point d'arrivée a pour coordonnées $(n\,;-1)$;
- T_n le nombre de parcours de taille n qui sont gagnants. On a $T_n = a_n + b_n + c_n$

1. Quelles sont les valeurs de a_1, b_1, c_1 et T_1 ?

2. On admet que l'on a $a_n = c_n$.

a. Justifier la relation $a_{n+1} = a_n + b_n$.

b. Justifier la relation $b_{n+1} = 2a_n + b_n$.

c. Démontrer alors la relation $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$.

3. Compléter le tableau de l'**annexe 3**.

4. Pour $n = 5$, démontrer que la probabilité qu'un parcours de Max soit gagnant est égal à $\frac{11}{27}$.

Partie C - Expression explicite

Les nombres T_n sont ceux définis dans la **partie B.**
On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$. On pourra utiliser ce résultat même si on n'a pas réussi à le démontrer dans la **partie B.**

1. Déterminer les valeurs exactes des deux nombres réels distincts x_1 et x_2 qui sont solutions de l'équation $x^2 = 2x + 1$ avec $x_1 < x_2$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}x_1^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}x_2^n$ où x_1 et x_2 sont les nombres réels définis à la question précédente.

a. Vérifier que l'on a $u_1 = T_1$.

b. En utilisant $x_1^2 = 2x_1 + 1$ et ${x_2}^2 = 2x_2 + 1$, démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.

c. En déduire une expression explicite de T_n en fonction de n.

d. Déterminer, en fonction de n, la probabilité qu'un parcours de taille n soit gagnant.

Annexes (penser à rendre l'énoncé complet avec la copie)

Exercice 1

Annexe 1 (Partie A question 1)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(n)$												

Annexe 2 (Partie B question 8)

a	b	c	$n = 2^a \times 3^b \times 5^c$	$d(n)$
0	0	0	1	1
1	0	0	2	2
1	1	0	6	
1	1	1		
2	0	0		
2	1	0		
2	1	1		
2	2	0		
2	2	1		
3				
3				
3				
3				
4				
4				
4				
5				
5				
6				
6				
7				

Exercice 2

Annexe 3 (Partie B question 3)

n	1	2	3	4	5
a_n					
b_n					
T_n					