RÉGION ACADÉMIQUE CORSE
Liberté
Égalité
Fraternité

# Olympiades académiques de Mathématiques 2025

## Académie de Corse

## Partie 2

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, <u>les énoncés et les copies sont ramassées</u> et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie à l'issue de laquelle <u>les énoncés et les copies sont également ramassées</u>.

**Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures)**.

> **Tous les candidats** doivent traiter les exercices académiques 1 et 2, éventuellement en groupes de deux ou trois élèves.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer à l'autre exercice quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerres sont autorisés ainsi que les calculatrices, selon la réglementation en vigueur.

<u>**Les énoncés doivent être rendus**</u> au moment de quitter définitivement la salle de composition.

***Le sujet académique comporte 5 pages.***
***Assurez-vous qu'il est complet.***

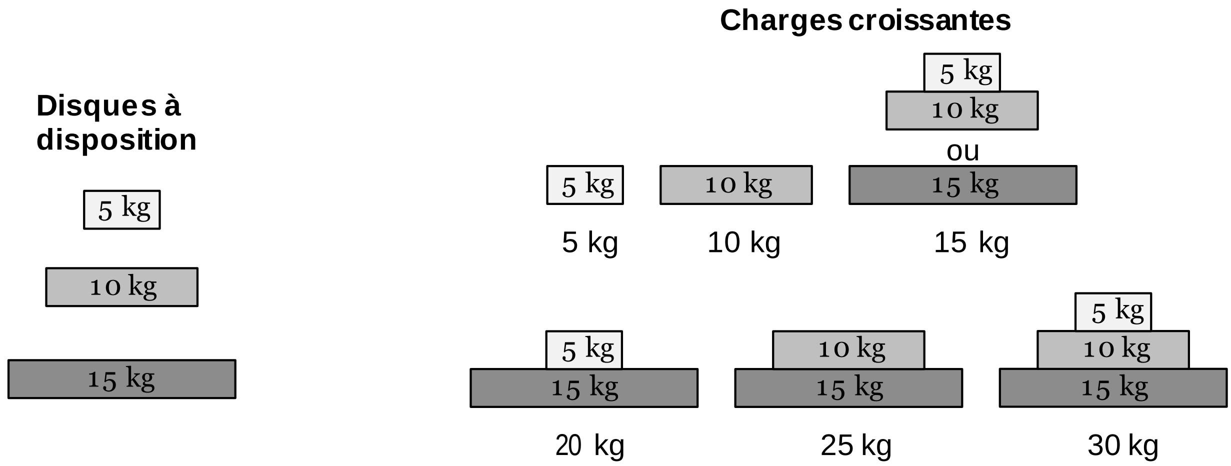
# Exercice 1
## Un programme musclé

Un sportif décide de suivre un programme de musculation.
Il souhaite acheter des disques en acier, de masses toutes différentes, qu'il pourra ensuite empiler afin de les soulever progressivement et de façon croissante.

On appelle **charge** la somme des masses des disques à soulever au fur et à mesure des empilements.

*Exemple :*

Si le sportif achète un disque de 5 kg, un disque de 10 kg et un disque de 15 kg pour son programme de musculation, il pourra alors soulever successivement et de façon croissante les charges de 5 kg ; 10 kg ; 15 kg ; 20 kg ; 25 kg et 30 kg (voir illustration ci-dessous).




*Notations et définitions :*

- (5; 10; 15) est appelée, par abus de langage, la **liste des « poids »** à disposition dans l'ordre croissant.
- [5; 10; 15; 20; 25; 30] est appelée la **liste des charges croissantes** du programme de musculation. *Remarque :* Si une charge peut être obtenue de plusieurs façons (comme la charge de 15 kg dans l'exemple donné), elle ne sera notée qu'une fois dans la liste des poids.
- (5; 10; 15) → [5; 10; 15; 20; 25; 30] est **la correspondance entre la liste des poids et la liste des charges croissantes** du programme de musculation.
- On appelle **pas** entre deux charges consécutives $C_1$ et $C_2$ la différence $C_2 - C_1$.
- Si tous les pas d'une liste de charges sont égaux, le programme de musculation est dit **régulier** sinon il est dit **irrégulier**.

*Ainsi, avec les notations précédentes :*

- (5; 10; 15) → [5; 10; 15; 20; 25; 30], le programme de musculation est régulier de pas égaux à 5.

- (1; 3; 4) → [1; 3; 4; 5; 7; 8], les pas sont successivement égaux à 2 ; 1 ; 1 ; 2 ; 1 : le programme de musculation est donc irrégulier, avec un pas minimum de 1 et un pas maximum de 2.

**Partie 1 : Premiers exemples**

Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme de musculation correspondant est régulier en précisant la valeur des pas constants. S'il est irrégulier, on précisera la valeur du pas minimum et la valeur du pas maximum.

**a.** $(10; 15; 20)$ **b.** $(1; 2; 3)$ **c.** $(2; 4; 6)$ **d.** $(3; 5; 7)$

**Partie 2 : Poids entiers consécutifs et poids entiers pairs**

**1.** La liste de poids $(1; 2; 3; 4)$ permet-elle un programme de musculation régulier ? Justifier.

**2.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $(1; 2; 3; \dots; n)$ la liste des poids entiers compris entre 1 et $n$.

**a.** Si le sportif n'utilise qu'un seul disque à la fois, quelle est la liste des charges correspondantes ?

**b.** Montrer qu'en utilisant deux disques il est possible de former toutes les charges entières comprises entre $n+1$ et $2n-1$.

**c.** Montrer qu'en utilisant trois disques il est possible de former toutes les charges entières comprises entre $2n$ et $3n-3$.

**d.** On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$.

Montrer que le programme de musculation associé à la liste des poids $(1; 2; 3; \dots; n)$ est formé de toutes les charges entières comprises entre 1 et $S$ (il est donc régulier de pas constants égaux à 1).

**3.** Soit la liste des poids pairs $(2; 4; \dots; 2n)$, le programme de musculation est-il régulier ? Justifier.

**Partie 3 : Poids entiers impairs**

**1.** Pour chacune des listes de poids ci-dessous, déterminer si le programme est régulier ou irrégulier.

**a.** $(1; 3)$ **b.** $(1; 3; 5)$ **c.** $(1; 3; 5; 7)$

**2.** Plus généralement, soit $n$ un entier impair supérieur ou égal à 3. On note $(1; 3; 5; \dots; n)$ la liste des poids impairs compris entre 1 et $n$, et on pose $T = 1 + 3 + 5 + \cdots + n$.

Montrer que les charges 2 et $(T - 2)$ ne font pas partie du programme de musculation.

*Remarque :* il est possible de montrer que 2 et $(T - 2)$ sont les seules charges entières comprises entre 1 et $T$ ne faisant pas partie du programme musculation, mais il n'est pas demandé de le démontrer.

**Partie 4 : Programmes de musculation réguliers utilisant deux ou trois disques**

Le sportif décide d'acheter au maximum trois disques tous de masses distinctes pour son programme de musculation, on aura donc soit une liste de deux poids $(a; b)$ avec $a < b$, soit une liste de trois poids $(a; b; c)$ avec $a < b < c$ ; $a, b, c$ étant des réels strictement positifs.

**1.** Montrer que les listes de deux poids distincts $(a; b)$ permettant un programme de musculation régulier sont celles de la forme $(a; 2a)$ (autrement dit celles telles que $b = 2a$).

**2.** Déterminer les listes de trois poids distincts $(a; b; c)$ permettant un programme de musculation régulier. (*On pourra distinguer les cas : $c = a + b$, $c > a + b$, $c < a + b$*).

# Exercice 2
# La fonction Kaprekar

***Dattatreya Ramachandra Kaprekar*** *(1905 - 1988) est un mathématicien indien. Dès son enfance il est passionné par les nombres et la résolution de problèmes et d'énigmes. Il fait une carrière d'instituteur tout en continuant à travailler sur les nombres. Il n'était pas reconnu de ses contemporains, et même moqué par les mathématiciens de son temps. C'est Martin Gardner, à partir de 1975, qui le fait connaître dans la revue Scientific American.*

La fonction Kaprekar, notée $K$ est définie sur $\mathbb{N}$ ; pour tout entier naturel $n$, on a $K(n) = n_1 - n_2$ avec $n_1$ le nombre obtenu à partir des chiffres de $n$, rangés dans l'ordre décroissant et $n_2$ le nombre obtenu à partir des chiffres de $n$, rangés dans l'ordre croissant.
On appelle **point fixe** de la fonction $K$, un nombre égal à son image par la fonction $K$.
Un nombre pour lequel le calcul d'images successives par la fonction $K$ donne le résultat $0$ est appelé **un cas dégénéré.**
Les images successives par la fonction $K$ sont appelées **$\boldsymbol{K}$-itérations** ou **$\boldsymbol{K}$-itérés**.

Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel.

On note $n = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ l'écriture décimale de l'entier naturel $n$. Pour un entier à quatre chiffres, on a $n = \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0$.

*Exemple :* Prenons le nombre 3215. C'est un nombre à quatre chiffres.

$$n = \overline{3215} = 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5.$$

On a $n_1 = 5321$ ; $n_2 = 1235$ ; $K(n) = 5321 - 1235 = 4086$.

***Afin d'éviter de refaire certains calculs, on pourra utiliser des résultats obtenus dans les questions ou dans les parties précédentes.***

## Partie 1 : Premiers exemples

1. En calculant les images successives de $45$ puis de $75$ par la fonction $K$, montrer que l'on obtient $0$. Cela signifie que $45$ et $75$ sont des cas dégénérés.
2. Montrer que $121$ est un cas dégénéré.
3. Donner un nombre à quatre chiffres qui est un cas dégénéré.
4. Que peut-on dire des nombres à un chiffre ?
5. Comparer $K(12\,725)$ et $K(52\,217)$.
6. Que peut-on dire sur les nombres s'écrivant avec les mêmes chiffres ?

## Partie 2 : Les nombres à deux chiffres

Soit $n$ un entier naturel à deux chiffres avec $\boldsymbol{n_1} = \overline{ab}$.

1. Montrer que $K(n) = 9(a - b)$.
2. Montrer que $(a - b)$ est un entier compris entre $0$ et $9$.
3. Montrer que les nombres à deux chiffres sont des cas dégénérés.

**Partie 3 : Les nombres à trois chiffres distincts**

Soit $n$ un entier naturel à trois chiffres chiffes distincts ; on note $\boldsymbol{n_1} = \overline{abc}$.

1. Montrer que $495$ est un point fixe de $K$.
2. On pose $K(n) = \overline{efg}$ avec $e, f, g$ trois chiffres.

   **a.** Démontrer les égalités :
   $g = (10 + c) - a$ $\qquad$ $f = 10 + b - (1 + b)$ $\qquad$ et $\qquad$ $e = a - (c + 1)$

   **b.** Démontrer que l'image par la fonction $K$ d'un entier $n$ à trois chiffres distincts a pour chiffre des dizaines 9 et que la somme des chiffres des unités et des centaines est égale à 9.

**Partie 4 : Les nombres à quatre chiffres**

Dans cette partie, on considère la propriété : « *La suite des K-itérés d'un entier compris entre* $1000$ *et* $9999$ *boucle sur l'un des entiers* $6174$ *ou* $0$ ».

1. Montrer que $6174$ est un point fixe de $K$.
2. Vérifier la propriété pour les nombres $7443$ et $8442$.
3. Dans cette question, on prend $n$ un entier naturel à quatre chiffres tel que $\boldsymbol{n_1} = \overline{abcd}$ avec $b \neq c$.

   **a.** Montrer que $K(n) = 999(a - d) + 90(b - c)$.

   **b.** Montrer que $K(n) = 1000(a - d) + 100(b - c - 1) + 10(9 - b + c) + 10 - a + d$. On admet que l'on obtient ainsi l'écriture décimale de $K(n)$ est $\overline{a-d \quad b-c-1 \quad 9-b+c \quad 10-a+d}$.

   **c.** En posant $u = a - d$ et $v = b - c - 1$, on a $K(n) = \overline{u \quad v \quad 8-v \quad 10-u}$.

   (i) Montrer que $u > v$.

   (ii) Montrer qu'il y a $45$ valeurs possibles pour $K(n)$.

   (iii) Vérifier la propriété pour $v = 4$.

   On admet que la propriété est vraie pour les autres valeurs de $v$.

4. Vérifier la propriété dans le cas d'un entier naturel à quatre chiffres tel que $\boldsymbol{n_1} = \overline{abcd}$ avec $b = c$. On pourra éventuellement s'appuyer sur les questions précédentes.