

Olympiades académiques de Mathématiques 2026

Académie de Corse

Partie 2

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont distribués puis ramassés à des moments différents.

Une des deux parties de l'épreuve est constituée des exercices nationaux, l'autre des exercices académiques. À l'issue de la première partie, les énoncés et les copies sont ramassés ; une pause de cinq à quinze minutes est prévue avant la seconde partie à l'issue de laquelle les énoncés et les copies sont également ramassés.

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2 heures).

Tous les candidats, composant individuellement ou en groupe, traitent les deux exercices.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre. **Il est également conseillé d'accorder entre 40 minutes et une heure à un premier exercice, puis de passer au second exercice quitte à revenir ensuite au premier.**

Lorsque les candidats repèrent ce qui leur semble être une erreur d'énoncé, ils l'indiquent sur la copie en expliquant les initiatives menées et ils poursuivent la composition.

Les règles, compas, rapporteurs, équerre et calculatrices sont autorisés selon la réglementation en vigueur.

Les énoncés et la copie doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, sans oublier l'annexe.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

***Le sujet académique comporte 10 pages.
Assurez-vous qu'il est complet.***

Exercice 1 : L'ultime case

Partie A : L'anniversaire de Marthe et Gabriel

Pour leur anniversaire les jumeaux Marthe et Gabriel ont reçu un cadeau. Il s'agit d'un lot de 26 boîtes, numérotées de 1 à 26, contenant une surprise. Ils doivent choisir une seule boîte.

Marthe a une idée, elle va choisir sa boîte selon un protocole bien précis :

- Elle élimine la boîte n°1, conserve la boîte n°2, élimine la n°3, conserve la n°4 et poursuit ainsi de suite en éliminant une boîte sur deux jusqu'à avoir parcouru la liste des 26 boîtes ;
- À la fin de ce premier tour, elle recommence avec les boîtes conservées précédemment : elle élimine la première de ces boîtes, conserve la deuxième, élimine la troisième et ainsi de suite ;
- Elle poursuit ainsi en recommençant jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule boîte. Cette ultime boîte est celle qu'elle ouvrira pour découvrir sa surprise.

Gabriel décide de s'inspirer de l'idée de sa sœur mais il choisit de son côté de n'éliminer qu'une boîte sur trois. Ainsi, au premier tour, il élimine la boîte n°1, conserve les boîtes n°2 et n°3, élimine la boîte n°4, conserve les boîtes n°5 et n°6, élimine la boîte n°7 et poursuit ainsi de suite.

1. Vérifier que Marthe ouvrira la boîte n°16.
2.
 - a. Gabriel pense qu'avec sa méthode, il n'ouvrira pas la même boîte que sa sœur. A-t-il raison ?
 - b. Quelle boîte ouvrira Gabriel ?

*Gabriel a tellement aimé l'idée de Marthe que, dès le lendemain, il en a parlé à son professeur de mathématiques qui lui a posé la question suivante : « si, au lieu d'avoir face à vous 26 boîtes, vous aviez eu 2026 cases numérotées de 1 à 2026, quel est le numéro de la case que vous auriez ouverte ? ». **Le reste de l'exercice permet de répondre à la question.***

Partie B : Quand le professeur de mathématiques s'en mêle avec la stratégie de Marthe

On élimine à chaque tour la première case puis les cases suivantes de deux en deux, mais cette fois-ci avec 2026 cases.

1. Quelles sont les cases conservées à la fin du premier tour ?
2. Soit n un entier naturel non nul et pair ; cela signifie qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $n = 2k$.
 - a. À quelle condition sur k la case numéro n est-elle conservée à la fin du deuxième tour ?
 - b. Quelles sont les cases conservées à la fin du troisième tour ?
3. Si on élimine les cases de deux en deux, quel sera le numéro de la dernière case dans le problème à 2026 cases ?

Partie C : Quand le professeur de mathématiques s'en mêle avec la stratégie de Gabriel

On élimine à chaque tour la première case puis les cases suivantes de trois en trois, mais cette fois-ci avec 2026 cases.

On appelle division quasi-euclidienne par 3 l'écriture d'un nombre entier n sous la forme $n = 3q + r$ où q et r sont des nombres entiers avec $-2 \leq r \leq 0$.

Par exemple,

- La division quasi-euclidienne par 3 de 26 est :
 $26 = 9 \times 3 - 1$ (on a donc ici $q = 9$ et $r = -1$).
- La division quasi-euclidienne par 3 de 27 est :
 $27 = 3 \times 9 + 0$ (on a donc ici $q = 9$ et $r = 0$).

1.
 - a. Ecrire la division quasi-euclidienne de 2026 par 3.
 - b. La case n°2026 sera-t-elle éliminée au premier tour ?
 - c. Combien de cases restera-t-il à la fin du premier tour ?
2. Soit n un numéro de case ($1 \leq n \leq 2026$). On écrit la division quasi-euclidienne de n par 3 sous la forme $n = 3q + r$.
 - a. À quelle condition sur r la case n est-elle éliminée au premier tour ?

b. Justifier qu'à l'issue du premier tour le nombre de cases restantes dont le numéro est inférieur ou égal à n est égal à $2q + r$.

3. On donne le tableau suivant, partiellement complété. Recopier et compléter les deux premières lignes du tableau.

Numéro du tour		1	2	3	4	5	6	7	8
Nombres de cases à l'issue du tour	2026		900	600			177	118	78
Numéro du tour	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombres de cases à l'issue du tour	52	34	22	14	9	6	4	2	1

4. On considère à présent la dernière case restante c'est-à-dire la seule à la fin du dix-septième tour.

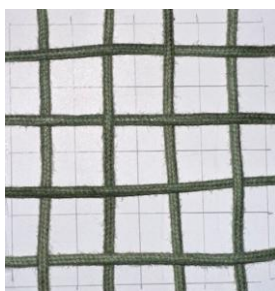
a. Justifier que cette case était en position 2 à la fin du seizième tour (c'est-à-dire que c'était la deuxième case en partant du début).

b. Justifier qu'elle était en position 3 à la fin du quinzième tour, en position 5 à la fin du quatorzième tour et en position 8 à la fin du treizième tour.

5. Si on élimine les cases de trois en trois, quel sera le numéro de la dernière case dans le problème à 2026 cases ?

Exercice 2 : Tissages mathématiques

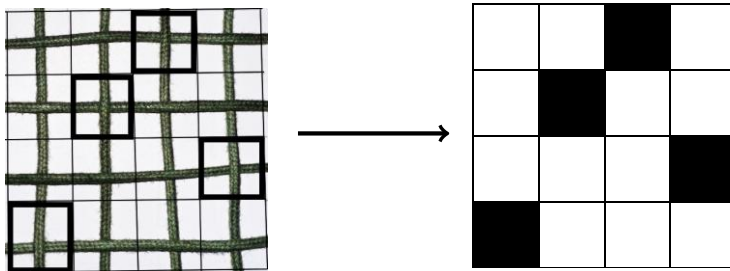
Le tissage consiste à croiser des fils verticaux avec des fils horizontaux pour former un tissu.



On se propose de modéliser mathématiquement le tissage par une grille où :

- les colonnes correspondent aux fils verticaux,
- les lignes correspondent aux fils horizontaux,
- les cases noires représentent le passage d'un fil vertical au-dessus d'un fil horizontal.
- les cases blanches représentent le passage d'un fil horizontal au-dessus d'un fil vertical.

Illustration :



Définition 1 : Soit p un entier naturel non nul.

On appelle **grille** de dimension $p \times p$, un quadrillage carré constitué de p^2 cases identiques.

La grille comporte des cases noires appelées **ombres** et des cases blanches.

Dans une grille de dimension $p \times p$, chaque case de la grille est repérée par des **coordonnées** $(x; y)$ telles que :

- x représente l'indice de la colonne (c'est un **entier** compris entre 0 et $p - 1$)
- y représente l'indice de la ligne (c'est un **entier** compris entre 0 et $p - 1$)

Partie A : Satin de taille p

Définition 2 : Un **satin de taille p** est une grille de dimension $p \times p$ constituée de p ombres telles qu'il existe une **unique** ombre sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Par convention, la case de coordonnées $(0; 0)$ correspond toujours à une ombre (case noire).

Exemple 1 : Voici la représentation d'un **satin de taille $p = 4$** . L'ombre A a pour coordonnées $(1; 2)$.

3				
2		A		
1				
0				
	0	1	2	3

1. Sur l'annexe 1, représenter les six satins de taille 4 que l'on peut créer.
2. Généralisation : Exprimer en fonction de p le nombre de satins de taille p que l'on peut créer. *Aucune justification n'est demandée.*

Partie B : Satin régulier de taille p et de décochement a

Propriété 1 : Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tel que $m = nq + r$ avec $r < n$.

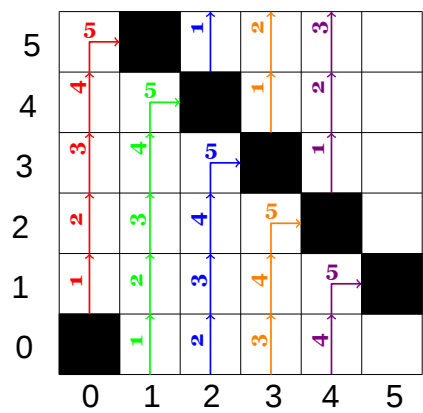
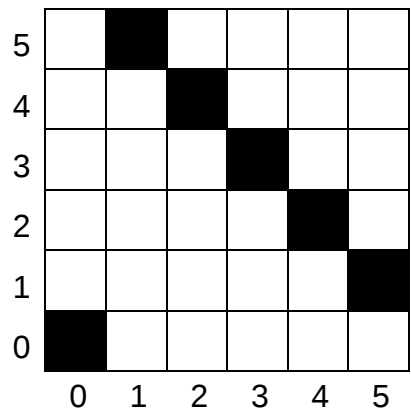
r est appelé le **reste de la division euclidienne** de m par n .

Définition 3 : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a < p$.

Un satin de taille p est dit **régulier de taille p et de décochement a** si les p ombres du satin ont pour coordonnées $(x; r)$ où x est un entier compris entre 0 et $p - 1$ et r est le reste de la division euclidienne de ax par p .

Exemple 2 : Voici la représentation du **satin régulier de taille $p = 6$ et de décochement $a = 5$** . On a bien $0 < a < p$.

Le décochement a peut se déterminer graphiquement



Ombre x	Ombre 0	Ombre 1	Ombre 2	Ombre 3	Ombre 4	Ombre 5
Coordonnées	(0 ; 0)	(1 ; 5)	(2 ; 4)	(3 ; 3)	(4 ; 2)	(5 ; 1)
ax	0	5	10	15	20	25
Division euclidienne de ax par p	$0 = 0 \times 6 + 0$	$5 = 0 \times 6 + 5$	$10 = 1 \times 6 + 4$	$15 = 2 \times 6 + 3$	$20 = 3 \times 6 + 2$	$25 = 4 \times 6 + 1$

Pour toutes les ombres du satin, le reste dans la division euclidienne de ax par p est bien égal à l'ordonnée de chaque ombre.

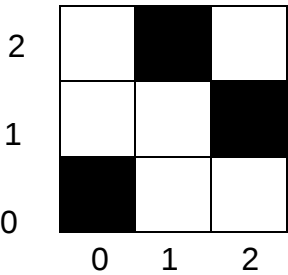
1. **Sur l'annexe 2**, représenter le satin régulier de taille 5 et de décochement 2.

2. Satin régulier de taille 2 :

Quelle est la seule valeur possible de a pour que le satin de taille 2 et de décochement a soit régulier ? Le représenter.

3. Satin régulier de taille 3 :

a. On donne, ci-dessous, la représentation d'un satin régulier de taille 3 et de décochement a . Préciser le décochement a associé.



b. Donner une autre représentation d'un satin régulier de taille 3 et préciser le décochement associé.

4. Parmi les satins de taille 4 (trouvés dans la partie A), combien sont réguliers ? Lesquels ? Préciser alors les décochements associés.

Définition 4 : Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que m et n sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Propriété 2 : On admet que a et p sont premiers entre eux (avec $0 < a < p$) si, et seulement si, le satin de taille p et de décochement a est régulier.

5. Combien de satins réguliers de taille 5 peut-on créer ? Justifier.

Partie C : Satin carré de taille p et de décochement a

Définition 5 : Un satin régulier de taille p et de décochement a est dit **carré** si, et seulement si, $a^2 + 1$ est divisible par p .

1. Vérifier que le satin régulier de taille 5 et de décochement 2 est carré.
2. Soit un satin régulier de taille 5 et de décochement a . Donner les valeurs de a pour que le satin régulier de taille 5 et de décochement a soit carré.
3. Donner les valeurs de a pour que le satin régulier de taille 10 et de décochement a soit carré.

Soient A et B deux ombres d'un satin de taille p .

Soient x_A, y_A, x_B et y_B quatre **entiers naturels** compris entre 0 et $p - 1$ tels que $(x_A; y_A)$ soient les coordonnées de A et $(x_B; y_B)$ soient les coordonnées de B .

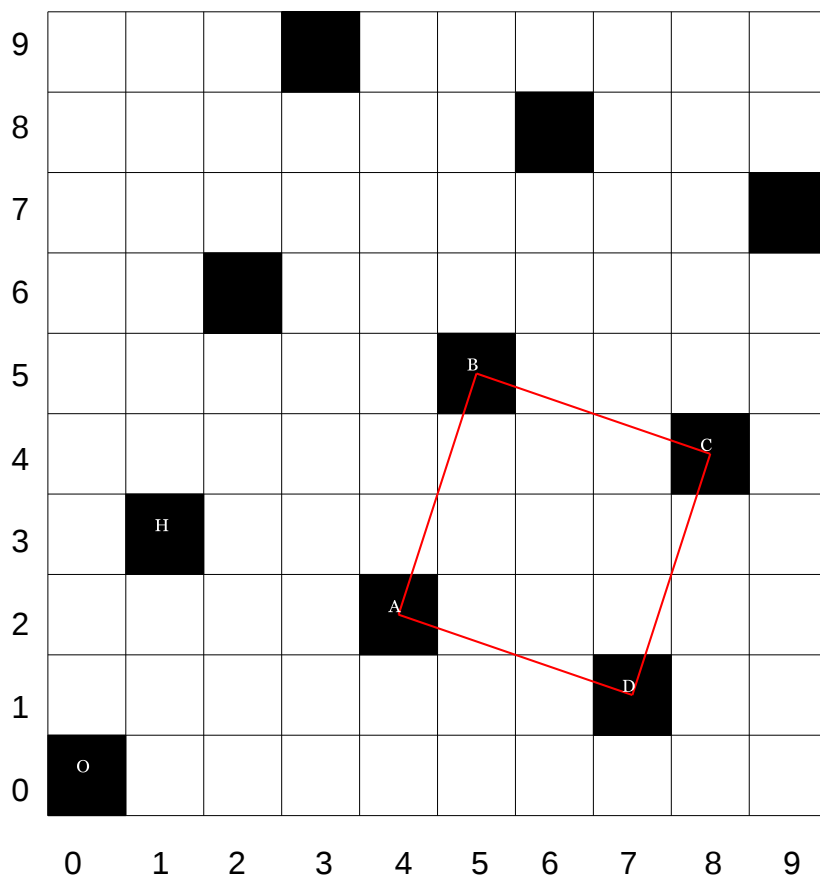
La distance entre les ombres A et B est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Un satin carré est appelé ainsi car lorsqu'on relie, par des lignes obliques, le centre de chacune des ombres on obtient des **carrés**.

On appelle carrés de taille minimale les carrés pour lesquels la distance entre deux ombres consécutives est la plus petite possible.

Exemple 3 : Représentation du satin carré de taille 10 et de décochement 3.
Les ombres A , B , C et D forment un carré de **taille minimale**.



4. En reprenant la représentation du satin carré de l'exemple 3, calculer la distance entre l'ombre A et l'ombre B .

5. Dans cette question, on cherche à démontrer la propriété suivante :

Si un satin de taille p est carré alors p s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers.

On considère un satin carré de taille p et de décochement a .

Soient A , B , C et D quatre ombres telles que $ABCD$ forme un **carré de taille minimale**. On note A_{satin} l'aire de la surface du satin et on note A_{ABCD} l'aire du carré $ABCD$. Une unité d'aire correspond à l'aire d'une case.

Propriété 3 :

$$A_{\text{satin}} = p \times A_{ABCD}$$

a. Montrer que $A_{ABCD} = p$.

b. En déduire que $AB = \sqrt{p}$.

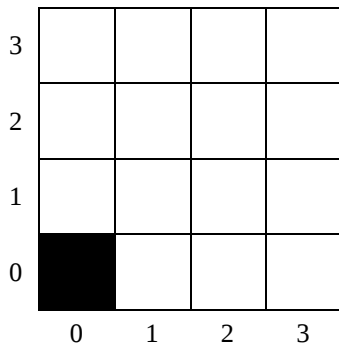
On note O l'ombre de coordonnées $(0 ; 0)$. Soient x et y deux **entiers naturels** compris entre 1 et $p - 1$. Il existe une ombre H de coordonnées $(x ; y)$ telle que $OH = AB$. On note I la case blanche de coordonnées $(x ; 0)$.

c. Montrer que p peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

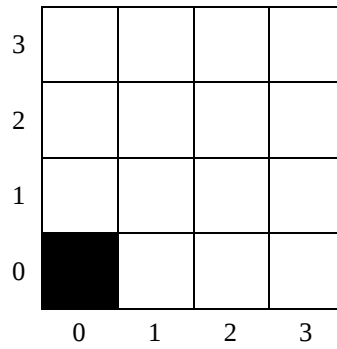
Annexes (à rendre avec la copie)

Annexe 1 : Partie A - Question 1

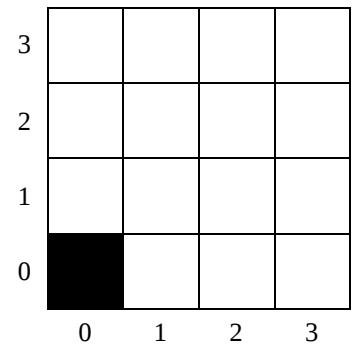
Satin A



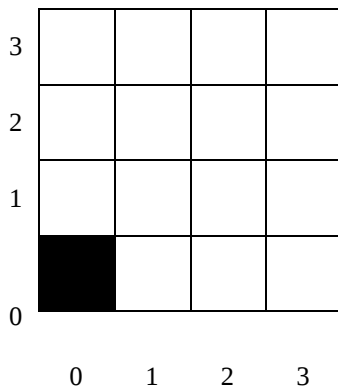
Satin B



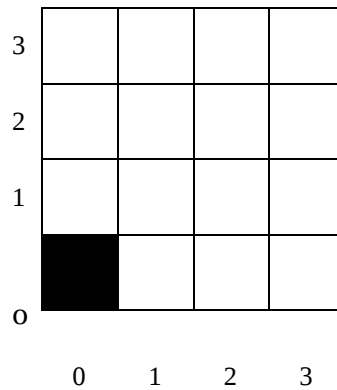
Satin C



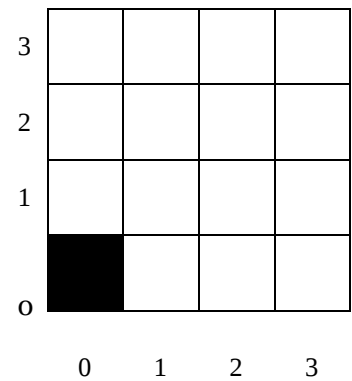
Satin D



Satin E



Satin F



Annexe 2 : Partie B – Question 1

