



RÉGION ACADÉMIQUE  
CORSE

Liberté  
Égalité  
Fraternité

# Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

## Concours René Merckhoffer

Mardi 24 mars 2026

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à **rédigé sur leurs copies** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

**CASIO**



**WOLFRAM**

**NUMWORKS**

## Exercice 1

### Des nombres hauts en couleur

On rappelle la définition suivante :

Un nombre  $x$  est rationnel s'il existe deux entiers  $a$  et  $b$ ,  $b \neq 0$ , tels que  $x = \frac{a}{b}$ .

À chaque nombre rationnel positif, on associe une couleur, jaune ou bleu, selon les règles suivantes :

- **1<sup>re</sup> règle** : le nombre 1 est bleu ;
- **2<sup>e</sup> règle** : pour tout nombre rationnel  $x$ , les nombres  $x$  et  $x+1$  ne sont pas de la même couleur ;
- **3<sup>e</sup> règle** : pour tout nombre rationnel  $x$  non nul, les nombres  $x$  et  $\frac{1}{x}$  sont de la même couleur.

1. Montrer que les nombres 0 et  $\frac{1}{2}$  sont jaunes.
2. a. Déterminer la couleur du nombre 8 puis du nombre 11.  
b. Expliquer comment déterminer la couleur d'un nombre entier positif  $n$  quelconque.
3. Déterminer la couleur des nombres suivants :  
 a.  $2 + \frac{1}{4}$                       b.  $\frac{13}{4}$                       c.  $\frac{3}{4}$                       d.  $\frac{1}{3 + \frac{1}{7}}$
4. Trouver deux nombres rationnels positifs de couleur jaune dont la somme est jaune.
5. Trouver deux nombres rationnels positifs de couleur jaune dont la somme est bleue.
6. Soit  $n$  un nombre entier positif non nul. Montrer que le nombre  $n + \frac{1}{n}$  est jaune.

## Exercice 2

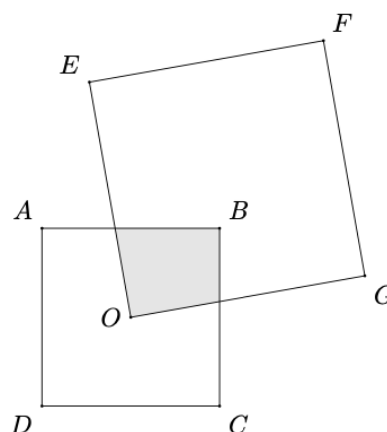
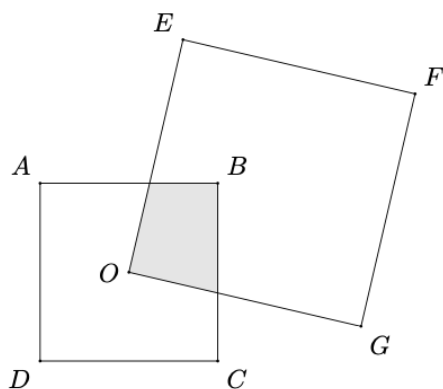
### Intersection de carrés

Soit ABCD un carré de côté de longueur  $x$  et de centre  $O$ .

Soit OEFG un carré dont la longueur du côté est plus grande que  $x$ .

On fait tourner le carré OEFG autour du point  $O$ . La surface grisée correspond à l'intersection des deux carrés. On admet que cette surface grisée est soit un quadrilatère soit un triangle.

Voici deux exemples de figures :



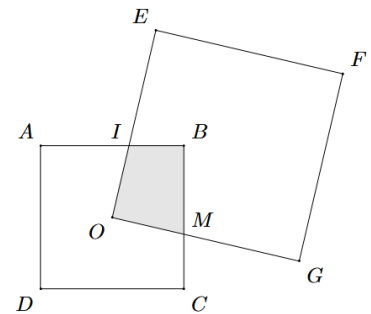
1.
  - a. Faire une figure dans le cas où la surface grisée est un carré.
  - b. Dans le cas où la surface grisée est un carré, exprimer en fonction de  $x$  l'aire de la surface grisée.

2.

- a. Faire une figure dans le cas où la surface grisée est un triangle.
- b. Dans le cas où la surface grisée est un triangle, exprimer en fonction de  $x$  l'aire de la surface grisée.

3. Dans cette question, la surface grisée est un quadrilatère quelconque que l'on appelle OIBM, où le point I est l'intersection des segments [AB] et [OE], et M est l'intersection de [BC] et [OG].

Exprimer en fonction de  $x$  l'aire de la surface grisée.



4. L'aire de la surface grisée change-t-elle quand le carré OEFG tourne autour du point O ?

### Exercice 3 Des nombres tempérés

Un nombre entier strictement positif  $n$  est dit 2-tempéré s'il existe deux entiers positifs ou nuls  $a$  et  $b$  tels que :  $n = \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

Par exemple : 10 est 2-tempéré car  $10 = \frac{2^2 + 4^2}{2}$  et 16 est 2-tempéré car  $16 = \frac{4^2 + 4^2}{2}$ .

1. a. Montrer que 13 est un nombre 2-tempéré.  
b. Le nombre 11 est-il 2-tempéré ?
2. On rappelle qu'un nombre  $n$  est un carré parfait s'il existe un nombre entier  $m$  tel que  $n = m^2$  (par exemple, 16 est un carré parfait car  $16 = 4^2$ ).  
Montrer que tout carré parfait est 2-tempéré.
3. Montrer que si  $n$  est 2-tempéré, alors  $4n$  est aussi 2-tempéré.

De la même façon, un nombre entier strictement positif  $n$  est dit 3-tempéré s'il existe trois entiers positifs ou nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ . Par exemple, 8 est 3-tempéré car  $8 = \frac{2^2 + 2^2 + 4^2}{3}$ .

4. Le nombre 10 est-il à la fois 2-tempéré et 3-tempéré ?

Soit  $k$  un nombre entier supérieur ou égal à 2. Un nombre entier strictement positif  $n$  est dit  $k$ -tempéré si  $n$  est la moyenne de  $k$  carrés d'entiers.

5. a. Montrer que, quel que soit  $k$  supérieur ou égal à 2, le nombre  $k$  est  $k$ -tempéré.  
b. Montrer qu'un carré parfait est  $k$ -tempéré, quel que soit  $k$  supérieur ou égal à 2.

## Exercice 4

### Aire d'une mandorle

Une mandorle est un élément d'architecture de forme ovale. Ce mot provient de l'italien « mandorla » qui signifie « amande ». Cette forme géométrique consistait à mettre en valeur un personnage.



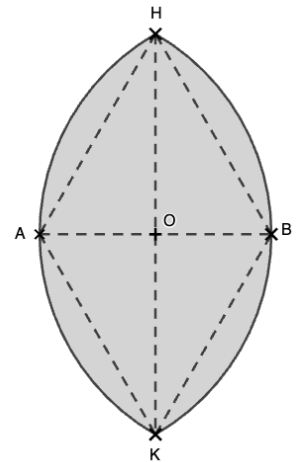
Abbaye de Cluny, les tons de la musique

Source : <https://bourgognemedievale.com/departement-et-pays/saone-et-loire/pays-sud-bourgogne-clunisois/cluny/>

Sur la figure ci-contre, on a représenté une mandorle qui est la surface grisée délimitée par deux arcs de cercle de même rayon  $AB$  et de mêmes extrémités  $H$  et  $K$  :

- un arc de cercle a pour centre le point  $A$  et passe par le point  $B$  ;
- un arc de cercle a pour centre le point  $B$  et passe par le point  $A$ .

Le point  $O$  est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère  $AHBK$ .  
Le but de l'exercice est de calculer l'aire d'une mandorle dans le cas où  $AB = 1$  dm.



1. Construire la mandorle en vraie grandeur avec  $AB = 1$  dm
2. Déterminer la nature du quadrilatère  $AHBK$ .
3. Démontrer que la hauteur  $KH$  de la mandorle est égale à  $2\sqrt{\frac{3}{4}}$  dm. On admettra que  $2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ .
4. Calculer l'aire, en  $\text{dm}^2$ , du quadrilatère  $AHBK$ . En donner la valeur exacte.
5. Calculer l'aire, en  $\text{dm}^2$ , de la portion du disque de centre  $A$  et de rayon  $AB$ , délimitée par les rayons  $[AH]$  et  $[AK]$ , et passant par le point  $B$ .
6. En déduire l'aire, en  $\text{dm}^2$ , de la mandorle.